PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 21 Juillet 2015

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (6,5 POINTS) :

I) On donne xy, yz, zx des nombres à deux chiffres et xyz à trois chiffres.

Résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation : xy + yz + zx = xyz. **2,00pt**

II) 1) Pour tout réel x, montrer que $\cos^3 x.\sin^4 x = \cos x.\sin^4 x - \cos x.\sin^6 x$. **0,50pt**

II) 2) En déduire le calcul de : **1,50pt**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x.\sin^4 x\,dx$$

III) On donne la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ où ln désigne le logarithme népérien.

III) 1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. **0,75pt**

III) 2) Calculer la dérivée de la fonction f. **0,75pt**

III) 3) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale : **1,00pt**

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t.\sin t}$$

NB: On admettra que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

EXERCICE 2 (4,5 POINTS) :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphisme φ de E défini par :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \frac{1}{3}(-10\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}) \\ \varphi(\vec{j}) = \frac{1}{3}(8\vec{i} + 2\vec{j} - 16\vec{k}) \\ \varphi(\vec{k}) = \frac{1}{3}(-4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) \end{cases}$$

On donne le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où x, y et z sont des nombres réels.

1) Donner l'expression de $\varphi(\vec{u})$ en fonction de x, y et z. **0,50pt**

2) On donne l'ensemble $F = \{\vec{u} \in E \text{ tel que } \varphi(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$. Montrer que F est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur directeur. **1,00pt**

3) On donne l'ensemble $G = \{\vec{u} \in E \text{ tel que } \varphi(\vec{u}) = -2\vec{u}\}$. Montrer que G est un plan vectoriel que l'on déterminera. **1,00pt**

4) En déduire que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on précisera. **1,00pt**

5) Soit P le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_2} = -\vec{i} + \vec{k}$. Montrer que P est globalement invariant par φ. **1,00pt**

PROBLEME (09 POINTS)

NB : les parties A et B du problème sont strictement indépendantes.

Partie A

La fonction f est définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$

ζ est sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est impaire et étudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$. **1,50pt**

1) b) Justifier que la droite (D) : $y = x + 1$ est une asymptote de ζ et que (T) : $y = \frac{x}{2}$ est la tangente à ζ au point O. **1,00pt**

1) c) Tracer ζ. **0,50pt**

2) Pour tout réel α, on considère les applications $S\alpha$ et $T\alpha$ du plan dans lui-même qui, à tout point $M\ (x, y)$, associe les points :

$$S\alpha\,(M) = M'\,(-y + 2\alpha, -x + 2\alpha) \text{ et } T\alpha\,(M) = M''\,(x + \alpha, y + \alpha).$$

2) a) Montrer que $S\alpha$ est une réflexion et $T\alpha$ est une translation. **1,00pt**

2) b) Vérifier que $S\alpha = T\alpha^{-1} \circ S\alpha \circ T\alpha^{-1}$. **0,50pt**

3) ζ_α est l'image de ζ par $T\alpha$.

3) a) Montrer que le point $K\,(\alpha, \alpha)$ est centre de symétrie de ζ_α. **0,50pt**

3) b) Montrer qu'il existe une fonction $f\alpha$ telle que l'équation de ζ_α soit $y = f\alpha\,(x)$. **0,50pt**

3) c) Justifier que $f\alpha\,(x) = \alpha + f\,(x-\alpha)$. **0,50pt**

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ω est un point de coordonnées $(2, 1)$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ valent respectivement $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.

Le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ vérifie l'équation (E) : $36x^2 + 29y^2 - 24xy - 120x - 10y - 55 = 0$.

1) Montrer que le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé. **0,50pt**

2) Exprimer x et y en fonction de X et Y. **1,00pt**

3) Démontrer que l'équation de (E) dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est : $4X^2 + 9Y^2 = 36$. **1,00pt**

4) En se servant du repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, vérifier que la courbe décrite par le point M est une conique dont on précisera la nature exacte et son excentricité. **0,50pt**

Fin de l'épreuve