PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 22 Mai 2015

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5,5 POINTS) :

1) Quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a ; on suppose que $10a^2 = d - b$.

1) Montrer que $q.(q+1).(q-1) = 10a$. **0,50pt**

1) Déterminer a, b, c et d. **1,50pt**

2) N est un entier naturel plus grand que 200. Dans la division euclidienne de N par 11, le reste est 9 et le quotient est q. Dans la division euclidienne de N par 12 le reste est r est le quotient est q − 1.
Déterminer les valeurs possibles de N. **1,00pt**

3) On veut résoudre sur ℝ une équation différentielle avec condition initiale.

3) a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle : (E) : $f'' + 2f' + 5f = 0$. **0,50pt**

3) b) Déterminer la solution de l'équation (E) lorsque $f(0) = 2$ et $f'(0) = -4$. **0,50pt**

4) Soit x un réel non nul et n un entier naturel non nul. On pose :

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} \cos kx \quad et \quad T_n = \sum_{0}^{n-1} \sin kx$$

4) a) Calculer $S_n + i.T_n$ en fonction de n et x. **0,50pt**

4) b) Démontrer que : **1,00pt**

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \quad et \quad T_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

EXERCICE 2 (4,5 POINTS) :

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que : AB = AC = ρ (ρ> 0) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note D le symétrique de A par rapport à B ; O est le milieu de [CD], $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [CD] et f la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

1) a) Placer les points A, B, C et D sur une figure puis construire $(\mathcal{C})$. **0,75pt**

1) b) Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude f. **0,50pt**

1) c) On note Ω le centre de la similitude f. Établir que : **0,50pt**

$$(1)\ (\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } (2)\ \Omega C = 2\Omega D$$

2) a) A l'aide de (1), montrer que Ω est un point du cercle $(\mathcal{C})$. **0,25pt**

2) b) En utilisant (2), prouver que ΩD = ρ et déduire que ΩB = BC. **0,50pt**

2) c) Donner la nature exacte du quadrilatère CADΩ et placer le point Ω. **0,50pt**

3) On pose $\vec{e}_1 = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormé $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3) a) Déterminer les affixes des points B, C, et D. **0,75pt**

3) b) Donner l'écriture complexe de f et déduire l'affixe du point Ω. **0,75pt**

PROBLEME (10 POINTS)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 3 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = ln(e^x + e^{-x})$ et (C) est sa courbe représentative dans le plan.

1) a) Déterminer la limite en +∞ de f. **0,50pt**

1) b) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $f(x) = x + ln(1 + e^{-2x})$. En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation y = x. **1,00pt**

1) c) Étudier la position de (C) et (Δ). **0,50pt**

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

3) Construire (C) et (Δ). **2,00pt**

4) Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$ on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$. On ne cherche pas à calculer F(x).

4) a) Soit a un réel positif. En utilisant la partie A, donner une interprétation géométrique de F(a). **0,50pt**

4) b) Étudier le sens de variation de F sur $[0; +\infty[$. **0,50pt**

Partie B

1) E est un plan vectoriel réel et f est un endomorphisme de E tel que : $Kerf = Imf$ où $Kerf$ et Imf représentent respectivement le noyau et les images de f. On suppose que $\vec{\imath}$ est un vecteur non nul de $Kerf$.

1) a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $\vec{\jmath}$ tel que $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath}$. **0,50pt**

1) b) Démontrer que la famille $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **1,00pt**

1) c) Démontrer que fof est l'endomorphisme nul. **0,50pt**

2) M est une matrice d'ordre 2 qui est déterminée par : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs.

2) a) Déterminer, en fonction de a, b, c et d, la matrice carrée de M (c'est à dire M^2). **0,50pt**

2) b) Déterminer les nombres entiers relatifs diviseurs communs de 7 et 14. **0,50pt**

2) c) Déterminer deux matrices d'ordre 2 vérifiant : $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$. **1,00pt**

Fin de l'épreuve