PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.com

Yaoundé le 23 Mai 2009

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (4,5 POINTS)

Soit la fonction numérique h définie par $h(x) = (2x^2 - 3x)e^x$.

1) Déterminer les deux premières dérivées de h et montrer que pour tout réel x, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 4e^x$. **1,00pt**
2) Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. **0,50pt**
3) Pour tout entier naturel non nul n, on note $h^{(n)}$ la dérivée n-ième de h, supposée indéfiniment dérivable. Pour tout réel x, montrer par récurrence sur n que : $h^{(n+2)}(x) - 2h^{(n+1)}(x) + h^{(n)}(x) = 4e^x$. **0,50pt**
4) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{R}^*$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $h^{(n)}(x) = (2x^2 + a_n x + b_n)e^x$. **1,00pt**
5) Exprimer a_n et b_n en fonction de n. **1,00pt**
6) Démontrer que l'équation $2x^2 + a_n x + b_n = 0$ admet toujours deux racines dans l'ensemble $\mathbb{R}$ **0,50pt**

EXERCICE 2 (4,5 POINTS)

1) On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$.
   a. A l'aide d'une intégration par partie, calculer I_1. **0,75pt**
   b. Pour tout entier naturel n non nul, prouver que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$. **0,50pt**
   c. En déduire la limite de la suite (I_n). **0,50pt**
   d. Montrer en utilisant une intégration par parties que, pour tout entier naturel n,
   $$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$ **0,75pt**

2) On considère la suite réelle (X_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $X_1 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul,
   $$X_{n+1} = X_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   a. La suite (X_n) est-elle arithmétique ? si oui donner sa raison. **0,75pt**
   b. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. **0,75pt**
   c. Déduire la limite de la suite (X_n). **0,50pt**

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Soit h la fonction numérique définie sur ℝ par : h(x) $\frac{2e^x + 2x - 2}{e^x}$.

On désigne par (Γ) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.
(Unités sur les axes : 2cm).

1.a) Montrer que l'on peut écrire h(x) sous la forme 2 + $\varphi(x)$ où φ est une fonction que l'on déterminera. **0,50pt**

b) Montrer que la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale 0. **0,50pt**

c) Etudier les variations de h et calculer h(0). **0,75pt**

2.a) Montrer que la courbe (Γ) coupe son asymptote en un point I dont on déterminera les coordonnées. **0,50pt**

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0. **0,50pt**

c) Tracer la courbe (Γ) **1,00pt**

d) Calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation y=2, x=0 et x=2. **0,75pt**

3. Soit (D_m) la droite d'équation y = -m, m étant un réel.

a) Tracer (D_1) et (D_2). **0,50pt**

b) Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$E_m : (2+m)e^x + 2x - 2 = 0$ **1,00pt**

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On note ψ l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i(z^3 - z^2)$ et H est l'ensemble des points M du plan tels que les points O, M, et M' soient alignés.

1. Déterminer ψ(O) et en déduire que O appartient à H. **0,75pt**
2. Montrer pour tout point M(z) distinct du point O, M ∈ H si et seulement si $i(z^2 - z) \in \mathbb{R}$ **1,00pt**
3. Montrer que H est la réunion de deux courbe C et C' que l'on précisera. **1,00pt**
4. Tracer H. **1,00pt**
5. On pose $Z_{n+4} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.Z_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral. **1,25pt**

Fin de l'épreuve