PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.com

Yaoundé le 25 Juillet 2009

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (3 POINTS) :

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition **simultanée** des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) On note u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
Démontrer que le couple (u, v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$. **0,50pt**

2) Résoudre dans IN l'équation (E_1) et déterminer la solution (u, v) permettant de déterminer J_1. **1,00pt**

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ? **0,50pt**

b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 2003, quelle est la date exacte du jour J_1 ?
(L'année 2004 étant une année bissextile) **0,50pt**

c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ? **0,50pt**

EXERCICE 2 (4 POINTS) :

1) Démontrer sans développer que pour tout entier naturel n non nul,
$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ est réel et $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n - \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ est imaginaire pur. **1,00pt**

2) Calculer de deux façons différentes le complexe $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$,

et en déduire les valeurs exactes de $\operatorname{Cos}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\operatorname{Sin}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. **1,00pt**

3) Soient (Xn) et (Yn) les suites des nombres complexes définies par :

$X_0 = 1$ et $\forall n \in IN$, $X_{n+1} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)X_n + 3$ et $Yn = Xn - i\sqrt{3}$.

a) - Montrer la suite (Yn) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. **0,50pt**

b) - Exprimer Y_n puis X_n en fonction de n. **0,50pt**

4) Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Déterminer et construire les ensembles Δ et ζ des points M d'affixe z définis par :

$\Delta = \left\{ M(z) \in P,\ \left|\dfrac{z-2}{iz+3}\right| = 1 \right\}$ et $\zeta. = \left\{ M(z) \in P,\ \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3} \right\}$. **1,00pt**

EXERCICE 3 (5 POINTS) :

Pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}dt$.

1) Etudier le sens de variation de la fonction F. **1,00pt**

2) On désigne par a un réel strictement positif.

Prouver que pour tout réel t dans l'intervalle [1, 1 + a], $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

et déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$. **0,50pt**

3) a – Déduire de la question 2 que, pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$,

$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$ puis que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. **1,00pt**

b – Montrer que la fonction F admet une limite finie notée ℓ à $+\infty$. **0,50pt**

4) Pour tout entier naturel n, on pose : $Un = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}dt$

a – Démontrer que $0 \leq Un \leq \ln(1 + e^{-2n})$. **0,50pt**

b – En déduire que la suite (Un) est convergente et déterminer sa limite. **0,50pt**

5) Pour tout entier naturel n, on pose : $Sn = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

a – Exprimer Sn à l'aide F et n. **0,50pt**

b – Prouver que la suite (Sn) est convergente et déterminer sa limite. **0,50pt**

EXERCICE 4 (8 POINTS) :

On considère :

* Une urne dans laquelle se trouvent 6 boules de couleurs distinctes et indiscernables au toucher parmi lesquelles 3 portent le numéro 1 ; deux le numéro -1 et une le numéro 0.

* Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $|MA + aMB| = 4$ où $A(2,-3)$; $B(0,1)$ et a est un réel,

* L'équation différentielle (E) : $ay' + 2y' + y = 0$ où a est un réel ;

* Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dont la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour $a = -1$, (Γ) est une hyperbole et donner dans un repère convenablement défini, l'équation réduite de (Γ). **1,50pt**

2. On choisit au hasard une boule de l'urne et on note a son numéro. Quelle est la probabilité de chacun, des évènements suivants :

A : « (Γ) est une hyperbole » **1,00pt**

B : « l'équation caractéristique de (E) a un discriminant strictement positif » **1,00pt**

C : « Les solutions de (E) sont des fonctions qui à x associent $\alpha e^{cx}\sin(wx+\varphi)$ où α, c, w et φ sont des réels. **1,50pt**

3. On désigne par E(λ) l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E pour lesquels f($\vec{u}$) = $\lambda\vec{u}$, où λ est un réel.

A - Montrer que les ensembles E(λ) sont des sous espaces vectoriels de E. **1,50pt**

B - Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles E(λ) contient au moins un vecteur non nul. **1,50pt**

Fin de l'épreuve