PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 21 Juillet 2010

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

Dans un plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = -jz + i, \text{ où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

1) Montrer que f admet exactement un point invariant Ω, dont on donnera l'affixe.

Caractériser géométriquement f. **1.00pt**

2) On définit dans le plan P la suite des points (M_n) par :

$M_0 = O$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. **0.75pt**

a) Construire les points Ω, M_0, M_1 et M_2. **0,75pt**

Pour tout entier naturel n, on note z_n l'affixe de M_n et on pose : $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Déterminer le nombre complexe a tel que, pour tout n, $Z_{n+1} = aZ_n$. **1pt**

c) Mettre a sous la forme trigonométrique et déterminer le plus petit entier p strictement positif tel que $a^p = 1$. **0.50pt**

d) Calculer Z_n puis z_n en fonction de n. **1.00pt**

e) Calculer z_{2010} et placer M_{2010} sur le dessin. **1.00pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

Pour tout x dans l'intervalle $]0, +\infty[$, on pose ; $F(x) = \int_0^x \ell n(1+e^{-2t})\,dt$
où ℓn désigne le logarithme népérien.

1) Etudier le sens de variation de la fonction F. **0.50pt**

2) On désigne par a un réel strictement positif. Prouver que pour tout t de l'intervalle $[1 ; 1 + a]$,

$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ et en déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ell n(1+a) \leq a$ **1.00pt**

3) Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 2) que

$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$ puis que $\frac{1}{2}\ell n2 - \frac{1}{2}\ell n(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. **1,50pt**

4) Montrer que F admet une limite finie ℓ à $+\infty$ et que $\frac{1}{2}\ell n2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

5) Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \int_n^{n+1} \ell n(1+e^{-2t})dt$.

a) Montrer que $0 \leq Un \leq \ell n(1+e^{-2n})$. **0.75pt**

b) Etudier la convergence de la suite (U_n). **0,50pt**

6) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$.

Exprimer S_n à laide de F et n. Prouver que la suite (S_n) est convergente et préciser sa limite. **0,75pt**

EXERCICE 3: (4.5 POINTS)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$U_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose :

$$V_n = \ln(U_n)$$

1) Calculer U_3 sous forme d'une fraction irréductible. **0.50pt**

2) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ **0.50pt**

3) En déduire que pour tout $x \geq 0$: **0.75pt**

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

4) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: **0.75pt**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5) En déduire que : **1.00pt**

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \leq V_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

6) Montrer que (V_n) converge, et préciser sa limite. **1.00pt**

EXERCICE 4 (5.5 POINTS)

Soit l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$.

Soit *C* la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application φ par $\varphi(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de φ. **0.50pt**

b) Calculer $\varphi(1)$ et étudier le signe de $\varphi(x)$ **0.50pt**

2) Etudier les variations de f. On pourra utiliser le 1) pour étudier le signe de f'(x). **1.00pt**

3) D étant la droite d'équation y = -x, étudier la position de *C* par rapport à *D*. **0.50pt**

4) Montrer qu'il existe un point unique A de *C* à déterminer où la tangente à *C* est parallèle à *D* **1.00pt**

5) Construire *C* et *D* **1.00pt**

6) Calculer l'aire géométrique du domaine délimité par : **1.00pt**

C, *D*, et les droites d'équation x=1/e et x=e.

Fin de l'épreuve