PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 25 Mai 2011

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5.5 POINTS) :

1) Soit n un entier naturel non nul ; θ un nombre réel appartenant à l'intervalle$]0,\pi[$.

On considère le nombre $u = cos\theta(cos\theta + i.sin\theta)$ et les suites :

$u_n = cos^2\theta + cos^2\theta cos(2\theta) + cos^3\theta cos(3\theta) + \ldots + cos^n\theta cos(n\theta)$

et $v_n = cos\theta sin\theta + cos^2\theta sin(2\theta) + cos^3\theta sin(3\theta) + \cdots + cos^n\theta sin(n\theta)$.

On pose $S_n = u_n + i.v_n$

a) Calculer en fonction de θ, le module et un argument de $1 - u$ **1.00pt**

b) Montrer que S_n est une somme de termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme **1.00pt**

c) En déduire en fonction de n et θ la valeur de S_n, puis montrer que

$$u_n = \frac{\cos^{n+1}\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\cos\theta - \cos^{n+1}\theta\cos(n\theta)}{\sin\theta}$$ **1.50pt**

2) P est un polynôme à coefficients réels défini par $P(X) = X^6 + 1$. On veut mettre P(X) sous la forme d'un produit de facteurs de trois polynômes d'ordre 2 à coefficient réels.

a) Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation $z^6 = -1$ **1.00pt**

b) En déduire de la question précédente une factorisation de P(X) **1.00pt**

EXERCICE 2 (4.5 POINTS) :

α est un nombre réel différent de 0, F est l'ensemble des applications $f_{a,b}$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{\alpha x}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **1.00pt**

2) Montrer que $(f_{1,0}, f_{0,1})$ est une base de F. Vérifier que $f'_{a,b}$ est un élément de F **1.00pt**

3) Soit d l'application de F dans F telle que $d(f_{a,b}) = f'_{a,b}$

a) Montrer que d est un endomorphisme de F **0.75pt**

b) Déterminer la matrice de d dans la base $(f_{1,0}, f_{0,1})$ **0.75pt**

c) Montrer que d est bijective et déterminer sa réciproque d^{-1} **1.00pt**

EXERCICE 3: (5 POINTS)

On considère un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note *g* l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} 5x' = 6x + 2y + 5 \\ 5y' = 2x + 9y + 10 \end{cases}$$

M'' est le symétrique de M' par rapport à M ; $A_0(3, 1)$ un point du plan et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des points définie par A_0 et pour tout n entier naturel, $A_{n+1} = g(A_n)$.

On note (x_n, y_n) les coordonnées du point A_n.

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe indépendante du point M. **0.50pt**

2) Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque M décrit le plan $\mathscr{P}$. **0.75pt**

3) Déduire des deux premières questions une construction géométrique du point M' lorsque le point M est connu. **0.50pt**

4) a) Démontrer que tous les points A_n appartiennent tous à la droite d'équation : $2x–y–5 = 0$. **0.50pt**

b) Déduire que pour tout entier n, on a : $x_{n+1} = 2x_n – 1$. **0.50pt**

5) a) Montrer que pour tout entier naturel n, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels. **0.50pt**

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$. **0.50pt**

c) Montrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+1}. **0.50pt**

d) Déterminer l'ensemble des $n\in\mathbb{N}$ pour lesquels l'entier naturel x_n est divisible par 5. **0.75pt**

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On considère dans le plan complexe $\mathscr{P}$, les points :

A d'affixe $z_A = 1$, M d'affixe z et N d'affixe $z_N = i.z - 1 - i$.

On note T_λ l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' barycentre du système $\{(M, \lambda), (N, -\lambda), (A, 1)\}$ où λ est un nombre réel non nul.

1) Montrer que pour tout point M du plan, N est l'image de M par une rotation que l'on caractérisera.

0.50pt

2) a) Démontrer que l'affixe z' du point M'est donnée par la relation :

$$z' = \lambda(1 - i).z + \lambda(1 + i) + 1$$ **0.75pt**

b) Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques. **0.50pt**

c) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles T_λ est une rotation. **0.50pt**

d) Peut-on trouver λ pour laquelle T_λ est une translation ? **0.50pt**

e) Exprimer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées (x, y) de M. **0.75pt**

3) Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point P de coordonnées $(-\ln\lambda, \ln\lambda)$.

Soit P' le point image de P par l'application T_λ.

a) Déterminer les coordonnées de P' en fonction de λ. **0.50pt**

b) Démontrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des points P' est la courbe Γ d'équation :

$$y = 2(x - 1).\ln(x - 1) + (x - 1).$$ **0.50pt**

c) Déterminer les coordonnées du point F de la courbe Γ où la tangente est parallèle à la première bissectrice. **0.50pt**

Fin de l'épreuve