PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 26 Juillet 2011

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (4.5 POINTS) :

(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormé de l'espace. On considère les points :
A (-1,1,3) ; B(2,1,0) ; C(4,-1,5) ; D(1,1,-1) et E(2,-1,4)

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan ; puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC). **1,50pt**

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (DE). Le plan (ABC) est-il sécant à la droite (DE) ? Si oui déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K. **1,50pt**

3) Calculer la distance du point D au plan (ABC) puis calculer le volume du tétraèdre ABCD. **1.50pt**

EXERCICE 2 (5,5 POINTS) :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) on considère les points M_n d'affixes
$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1 + i\sqrt{3}\right)$, où $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Donner Z_0, Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique. **1,00pt**

b) Montrer que la suite (Z_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. **0,50pt**

2) Déterminer la distance OM_n en fonction de n. **0,50pt**

3) a) Pour tout entier naturel n, calculer en fonction de n, la distance M_nM_{n+1}. **1,00pt**

b) Exprimer la somme $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} M_k M_{k+1}$ en fonction de n puis calculer la limite de L_n quand n tend vers +∞. **1,00pt**

4) a) Déterminer une mesure (en radian) de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ suivant les valeurs de n. **1,00pt**

b) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ? **0,50pt**

PROBLEME (10 POINTS) :

Les parties sont indépendantes.

A - Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dx$

1) Montrer que pour tout x ∈ [0, 1], on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. **0,50pt**

2) En déduire que pour tout x ∈ [0,1], $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq x$. **1,00pt**

3) Calculer f(0). **0,25pt**

B - On considère les intégrales :

$I(\propto) = \int_{\propto}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$ et $J(\propto) = \int_{\propto}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-x^2} dx$ définies pour tout $\propto \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout $x \in]0,1[$, on ait : $\frac{2}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$. **0,50pt**

2) En déduire la valeur de J(α) en fonction de α. **0,50pt**

3) en utilisant une intégration par parties, calculer I(α) en fonction de α, puis calculer la limite de I(α) quand α tend vers 0. **1,50pt**

C – Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x) = e^{-x}(3 + lnx)$ et g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$.

1) Calculer les limites de g en 0 et +∞. **0,50pt**

2) Calculer la dérivée g '(x), étudier son signe et dresser le tableau de variation de g. **1,50pt**

3) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α dans]0 ; +∞[telle que $0,45 < \alpha < 0,46$. **0,50pt**

4) De la question 3, déterminer le signe de g(x). **0,50pt**

5) On note $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.où l'unité sur les axes est de 4 cm.

   a) Calculer les limites de f en 0 et en +∞. **0,50pt**

   b) Montrer que pour tout x ∈]0 ; +∞[f '(x)= e^{-x} g(x). **0,50pt**

   c) Donner les variations de f. Prendre α=0,455. **0,75pt**

   d) Construire la courbe de f. **1,00pt**

Fin de l'épreuve