PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 23 Juillet 2012

CONCOURS D'ADMISSION
SESSION DE JUILLET
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (4,5 POINTS) :

N.B. : Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

$N(x, y)$ est nombre de base 7 qui est déterminé par $N(x, y) = \overline{2x0y4}^{7}$ où x et y sont des entiers naturels.

1) Donner l'écriture de $N(x, y)$ en base 10 en fonction de x et y. **0,50pt**

2) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $N(x, y)$ soit divisible par 15. **1,00pt**

Partie B

Dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{P}$, on considère l'endomorphisme σ_a dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$; σ_a est un automorphisme. **0,50pt**

2) Dans le plan affine euclidien $\mathbb{P}$; on considère l'application affine S_a d'endomorphisme σ_a qui transforme l'origine O du repère en un point O'(-1, 1).

On pose $S_a(M) = M'$ avec $M(x, y)$ et $M'(x', y')$.

2) a) Donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y. **0,75pt**

2) b) Le point M a pour affixe $z = x + iy$ et le point M' a pour affixe $z' = x' + iy'$.

Montrer que z et z' sont liées par une relation de la forme $z' = \alpha\bar{z} + \beta$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z et α et β sont des réels à déterminer. **0,75pt**

2) c) Déterminer la nature de S_a et donner les caractéristiques de S_a (le rapport et le centre pour les cas spécifiques de $a \neq 0$. **1,00pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

1) P est un plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3 (z est un nombre complexe).

1) a) Déterminer les nombres complexes z tels que les points A, B et C soient distincts deux à deux. **0,75pt**

1) b) Montrer que les points A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle de centre O autre que le cercle de centre O et de rayon 1. **0,75pt**

1) c) On admet que le triangle ABC est rectangle en C ; montrer que le point A est sur un cercle dont on précisera les caractéristiques. **0,75pt**

1) d) Déterminer le lieu géométrique du point A pour lequel ABC est un triangle isocèle (examiner les trois cas de figure). **0,75pt**

2) $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. P_1 et P_2 sont deux plans d'équations cartésiennes respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $3x + 4y - 2z + 5 = 0$

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (D) des deux plans P_1 et P_2. **1,00pt**

2) b) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P') qui passe par le point A (-1, 2, 2) et orthogonal aux plans P_1 et P_2. **1,00pt**

EXERCICE 3 (4,5 POINTS) :

Dans l'espace $\mathcal{E}$, ABC est un triangle de centre de gravité H ; D est un point appartenant à la droite orthogonale au plan (ABC) en H tel que DH = a où a > 0.

1) Montrer que le point G = bar{ (A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1) ; (D,3)} est le milieu du segment [DH]. **0,50pt**

2) Soit M un point de l'espace.

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$ est un vecteur constant de norme 3a. **0,50pt**

2) b) Déterminer l'ensemble E des points de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\| = \|\vec{v}\|$. **1,00pt**

3) Soient n un entier naturel et G_n = bar{ (A, n) ; (B, n) ; (C, n) ; (D,3)}.

3) a) Déterminer G_0 et G_1. **0,50pt**

3) b) Montrer que le point G_n appartient au segment [DH]. **0,50pt**

3) c) Calculer la distance DG_n en fonction de n et de a. **0,50pt**

3) d) Déterminer la limite de DG_n quand n tend vers $+\infty$ et préciser la position de G_n quand n tend vers $+\infty$. **0,50pt**

4) Soit S_n l'ensemble des points de l'espace tels que $\left\|n\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\| = n\|\vec{v}\|$.

Montrer que S_n est une sphère qui passe par D et dont on précisera le centre et le rayon. **1,00pt**

EXERCICE 4 (6 POINTS) :

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^n.e^{-x}.$$

Soit C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(unité 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée)

1) Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes A et B que l'on déterminera. **1,00pt**

2) Etudier les variations de f_n suivant les valeurs de n et dresser le tableau de variation de f_n dans chaque cas. **1,50pt**

3) Soit I_n le point de C_n d'abscisse non nul et dont la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer la courbe que parcourt I_n lorsque n varie dans $\mathbb{N}$. **1,00pt**

4) Tracer avec soin la courbe C_2. **1,00pt**

5) Soit λ un réel strictement supérieur à 2.

5) a) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer en cm² l'aire A_λ du domaine plan limité par C_2, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \lambda$. **1,00pt**

5) b) Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. **0,50pt**

Fin de l'épreuve