PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 22 Mai 2013

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

PROBLEME : (9 POINTS)

N.B. : Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne le point A de coordonnées (1, 0). L'application h est une homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

On considère l'application f du plan dans le plan qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) \end{cases}$$

1) Si z est l'affixe de M et z' l'affixe de M', trouver une relation entre z' et z ; puis donner la nature exacte de l'application f **0,75pt+0,50pt**

2) Déterminer l'expression complexe de h **0,50pt**

3) On veut étudier la composition des applications h et f

3) a) Quelle est la nature de l'application hof et déterminer les éléments caractéristiques de hof **1,00pt**

3) b) Déterminer l'expression complexe de l'application hof ; puis son expression analytique **1,00pt**

4) On considère l'hyperbole (H) d'équation cartésienne : $xy = -1$

4) a) Démontrer que l'image (H')de (H) par l'application hof a pour équation cartésienne :

$$x^2 - (y + 1)^2 = 4$$ **0,75pt**

4) b) En admettant que (H') est une hyperbole, préciser ses foyers, ses asymptotes, ses directrices et son excentricité **1,50pt**

Partie B

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 2z$.

1) a) Déterminer les points du plan ayant pour image le point A d'affixe -4. **0,50pt**

1) b) Ecrire les affixes des points obtenus sous forme trigonométrique. **0,50pt**

2) On note (x, y) les coordonnées du point M et (x', y') celles de son image M' par f.
Exprimer (x', y') en fonction de x et y. **1,00pt**

3) Etablir que l'ensemble (H) des points M dont les images M' appartiennent à l'axe des ordonnées est une hyperbole dont on précisera les sommets, les axes et les asymptotes. **1,00pt**

<u>EXERCICE 1 (6 POINTS) :</u>

1) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$PPCM(a,b) + PGCD(a,b) = b + 9$$ **1,25pt**

2) Pour tout entier naturel n, on considère l'entier : $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$

2) a) Démontrer que l'on a : $\forall n \in IN,\ A_{n+3} \equiv A_n\ [7]$ **0,50pt**

2) b) En déduire tous les entiers naturels n, tels que A_n soit divisible par 7 **0,50pt**

2) c) Les nombres a, b et c suivants sont en numération de base 2 :

$$a = \overline{1110}\ b = \overline{1010100} \text{ et } c = \overline{1001001000}.$$

Lesquels de ces nombres sont des multiples de 7 ? **0,75pt**

3) Soient (Un) et (Sn) les suites numériques définies pour tout entier naturel n par

$$\text{Un} = \int_n^{n+1} (t+2)e^{-\frac{t}{2}}dt \qquad \text{et} \qquad \text{Sn} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \text{ Un}.$$

3) a) Justifier l'existence de la suite (Un). **0,50pt**

3) b) Exprimer, pour tout entier naturel n, Un et Sn en fonction de n. **1,00pt**

3) c) Montrer que la suite (Sn) est majorée par 8. **0,50pt**

3) d) Montrer que la suite (Sn) est convergente. **0,50pt**

3) e) Calculer la limite de la suite (Un). **0,50pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-ln2\}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2}ln|2e^x - 1|$ et (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité sur les axes est de 2 cm.

1) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition

(on pourra utiliser le fait que $2e^x - 1 = 2e^x(1 - \frac{1}{2}e^{-x})$) **0,75pt**

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f **1,25pt**

3) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$ **0,50pt**

4) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ **0,50pt**

5) Montrer qu'il existe un unique nombre réel négatif α tel que $f(\alpha) = 0$ et qui vérifie la condition $-0,9 < \alpha < -08$ **1,00pt**

6) Construire les asymptotes (D_1) et (D_2) et la courbe (C) **1,00pt**

Fin de l'épreuve