PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 22 Juillet 2013

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SESSION DE JUILLET
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

PROBLEME (8,5 POINTS)

N.B. : Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -2x + \sqrt{3(x^2-1)}$. On note C_f sa courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\ )$.

1) a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,50pt**

1) b) Montrer que la courbe C_f admet deux asymptotes dont on donnera les équations cartésiennes. **1,00pt**

1) c) Préciser les demi-tangentes à C_f aux points d'abscisses 1 et -1. **0,50pt**

1) d) Construire la courbe C_f en prenant pour unité 2 cm sur les axes. **1,00pt**

2) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -2x - \sqrt{3(x^2-1)}$.

2) a) Montrer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à O. **0,50pt**

2) b) Montrer que la courbe $C = C_f \cup C_g$ a pour équation $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$ et construire cette courbe C_g dans le repère précédent, en pointillés. **1,50pt**

Partie B

1) Soit S la transformation du plan qui au point d'affixe Z associe le point d'affixe Z' tel que :

$$Z' = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i)Z.$$

1) a) Caractériser cette transformation. **0,50pt**

1) b) Trouver une équation de la courbe H, transformée de la courbe C par la transformation S. **1,00pt**

1) c) Donner la nature de la courbe H ainsi obtenue et déduire la nature de la courbe C. **1,00pt**

EXERCICE 1 (6,5 POINTS)

1) ABC est un triangle de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle, les triangles ABP, BCQ et CAR qui sont rectangles et isocèles respectivement en P, Q et R. Le point I est le milieu du segment $[BC]$.

1) a) Faire une figure claire de ces données. **0,50pt**

1) b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S_1 de centre B qui transforme P en A **0,50pt**

1) c) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S_2 de centre C qui transforme A en R. **0,50pt**

1) d) Démontrer que l'application $S_2 \circ S_1$ est une rotation de centre I et dont on précisera l'angle. **1,00pt**

1) e) En déduire la nature du triangle IPR. **0,50pt**

2) On donne l'équation (E) : $z^2 - 4.cos\theta z + 9 - 5.cos^2\theta = 0$ où z est un nombre complexe et θ un nombre réel contenu dans l'intervalle $[0, \pi]$.

2) a) Résoudre dans C l'équation (E) en tenant compte du paramètre θ. **1,00pt**

2) b) Soient M et N deux points d'affixes respectives:

$$z_M = 2.cos\theta + 3i.sin\theta \text{ et } z_N = 2.cos\theta - 3i.sin\theta$$

2) b) i) Comment sont les points M et N dans le plan complexe ? **0,50pt**

2) b) ii) Démontrer que M et N décrivent une partie de conique lorsque θ parcourt l'intervalle $[0, \pi]$; on précisera son équation cartésienne. **0,50pt**

2) b) iii) Donner la nature de cette conique, puis déterminer ses foyers, ses directrices et son excentricité. (On ne demande pas de construire la conique) **1.50pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS)

1) On considère deux entiers naturels a et b qui sont tels que $a > b$, puis on pose :

$$d = pgcd(a, b) \; et \; m = ppcm(a, b)$$

1) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 156. **0,50pt**

1) b) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) qui vérifient le système : **1,50pt**

$$\begin{cases} d \in \{6, 12, 39\} \\ m + d = 156 \end{cases}$$

2) Soient $x \; et \; y$ deux entiers relatifs.

2) a) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7. **0,50pt**

2) b) Démontrer que « 7 divise $x^2 + y^2$ » si et seulement si « 7 divise x et y ». **1,00pt**

2) c) En déduire de la question précédente que « 7 divise $x^2 + y^2$ » si et seulement si « 49 divise $x^2 + y^2$ » **0,50pt**

2) d) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) on considère le cercle de centre O et de rayon 7. Déterminer tous les points à coordonnées entières de ce cercle. **1,00pt**

Fin de l'épreuve