PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 22 Mai 2014

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5 POINTS) :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On désigne par (P) et (Q) les plans d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles. **0,50pt**

1) b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection (Δ) de ces deux plans. **0,50pt**

2) On considère le cône de révolution (Γ) d'axe (Ox) contenant la droite (Δ) comme génératrice. On rappelle qu'un tel cône a pour équation $b^2 + c^2 = a^2$ où (a, b, c) sont les coordonnées d'un point M de (Δ).

Montrer que (Γ) a pour équation $y^2 + z^2 = 7x^2$. **1,00pt**

3) a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3[7]$, où x est un entier relatif, n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. **1,00pt**

3) b) Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que si 7 ne divise pas les nombres a ou b alors 7 ne divise pas $a^2 + b^2$. **0,50pt**

3) c) En déduire que si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b. **0,50pt**

4) Soit $A(a, b, c)$ un point de l'espace.

4) a) Montrer que si $A \in (\Gamma)$ alors les nombres a, b et c sont divisibles par 7. **0,50pt**

4) b) En déduire que le seul point de (Γ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône. **0,50pt**

PROBLEME (10 POINTS)

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-x}$$
$$g(x) = f(x) + (f(x))^2$$

(C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité sur les axes est de 2 cm.

Partie A - Etude de la fonction f

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,50pt**

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

3) Montrer que la fonction f est bijective sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ et déterminer l'ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que : $B = f(]-\infty, 1])$. **0,25pt +0,25pt**

4) En déduire de la question 3) que les équations $(E_1): f(x) = \frac{-1}{2}$ et $(E_2): f(x) = -1$ admettent des solutions uniques α et β respectivement qui sont telles que :

$-0{,}36 < \alpha < -0{,}35$ et $-0{,}57 < \beta < -0{,}56$ **0,50pt +0,50pt**

Partie B - Etude de la fonction g et construction de la courbe de g

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,50pt**

2) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = f'(x)(1 + 2f(x))$. **0,75pt**

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$. **0,25pt**

5) a) Etablir chacune des relations (R_1) et (R_2) suivantes :

(R_1) : $g(x) - x = xe^{-x}(1 + xe^{-x} - e^x)$ **0,50pt**

(R_2): $1 + xe^{-x} < 1 + x < e^x$ **0,75pt**

5) b) Préciser la position de la courbe (C_g) et de la tangente (T). **0,50pt**

5) c) Construire la courbe (C_g) et la tangente (T). **1,00pt**

6) On veut calculer l'intégrale : $A(x) = \int_0^x g(t)dt$.

6) a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale : **0,50pt**

$$I(x) = \int_0^x f(t)dt$$

6) b) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale : **0,75pt**

$$J(x) = \int_0^x (f(t))^2 dt$$

6) c) En déduire $A(x)$. **0,50pt**

EXERCICE 2 (5 POINTS) :

Dans cet exercice, P est un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) (e) est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) qui vérifient l'équation cartésienne :

$$x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$$

1) a) Montrer que (e) est une ellipse dont on précisera le centre Ω. **0,50pt**

1) b) Déterminer les caractéristiques suivantes de (e) : l'excentricité, les sommets, les directrices et les foyers dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. **1,00pt**

2) On considère l'application S du plan P dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x\sqrt{3} + y) \\ y' = \frac{1}{4}(-x + y\sqrt{3}) \end{cases}$$

2) a) Déterminer la matrice A de l'endomorphisme associé à S dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. **0,50pt**

2) b) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}. **0,25pt +0,25pt**

2) c) Donner la forme complexe de l'application S. **0,50pt**

2) d) En déduire de la question c) la nature de S et ses éléments caractéristiques. **1,00pt**

2) e) Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la condition :

$$7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 24x - 8\sqrt{3}y - 16 = 0$$

2) e) i) Trouver l'équation cartésienne de l'image de (E) par S. **0,75pt**

2) e) ii) Donner la nature de l'ensemble (E). **0,25pt**

Fin de l'épreuve