PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
Fax. : 22 31 54 28
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr

Yaoundé le 24 mai 2008

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, et GCEAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (4pts)

L'objectif de cet exercice est le calcul des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \ \text{ et } \ K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

a) Montrer que f est une primitive de la fonction g. **1pt**

b) En déduire la valeur de I. **0,5pt**

2) On ne demande pas de calculer explicitement J et K dans cette question.

a) Vérifier que I + 2J = K. **0,5pt**

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, vérifier que $K = \sqrt{3} - J$. **1pt**

c) En déduire les valeurs exactes de J et K. **1pt**

EXERCICE 2 (5pts)

Soient deux urnes U_1 et U_2 ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires ; la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une des deux urnes choisie au hasard (il y a équiprobabilité sur le choix de l'urne), on extrait une boule que l'on remet dans la même urne : si la boule extraite est blanche, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule extraite est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne, les tirages sont équiprobables.

Soit p_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1) Déterminer p_1 et p_2. **1pt**

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{5}p_{n-1} + \frac{1}{5}$. **1pt**

TSVP ➔

3) On pose $V_n = p_n - \lambda$ où $\lambda \in IR$

a) Déterminer λ pour que $(V_n)_{n \geq 1}$ soit une suite géométrique. **1pt**

b) Déterminer V_n, puis p_n en fonction de n. **1pt**

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et donner une interprétation du résultat. **1pt**

<u>EXERCICE 3</u> (4pts)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y'' - y' + 2y = 2x + 3 \text{ et } (E') : z'' - z' + 2z = 0$$

où y et z sont des fonctions deux fois dérivables sur IR.

1) Déterminer une fonction affine h solution de l'équation différentielle (E). **1pt**
2) Montrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si f – h est solution de l'équation (E'). **1pt**
3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de l'équation (E). **1pt**
4) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique admet au point O(0,0) une tangente horizontale. **1pt**

<u>EXERCICE 4</u> (5pts)

On définit la fonction f sur IR par :

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1) Etudier les variations de f. **1pt**
2) En déduire que f est une bijection de IR vers un intervalle I à préciser. **0,5pt**
3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$. **0,5pt**
4) Montrer que $f(x) = 2 - \dfrac{3e^{-x}}{e^{-x} + 1}$; puis en déduire que (C_f) admet une asymptote. **1pt**
5) Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ par rapport à un même repère orthonormé. **1pt**
6) Déterminer l'aire du domaine plan délimité par (C_f) et l'axe des abscisses d'une part, et d'autre part par les droites d'équation respectives x = 0 et x = ln3. **1pt**

<u>EXERCICE 5</u> (2pts)

On considère l'application F qui, à tout point M du plan complexe d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = u^2 z + u - 1$ où u est un nombre complexe.

1) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. **1pt**
2) Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. **1pt**