PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.com

Yaoundé le 26 Juillet 2008

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, F, GCEAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1/ 2pts

Soit α un paramètre réel donné.
Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2z^2\cos\alpha + 1 = 0$ d'inconnue z. **2pts**

EXERCICE 2/ 4pts

2) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx$.

a) Calculer I – J et I + J + 2 K. **1 pt**
b) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ **1 pt**
c) En déduire I + J – 6 K. **1 pt**
d) Déterminer alors I, J et K. **1 pt**

EXERCICE 3/ 4pts

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle (E) : y' + y = x – 1.

1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_1^x e^t(t-1)dt$. **1pt**

2) Soit f une fonction dérivable sur IR. On pose $g(x) = e^{-x}.f(x)$.

a) Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si pour tout x de IR, $f'(x) = e^x(x-1)$. **1pt**

b) À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions f vérifiant :

$\forall x \in$ IR, $f'(x) = ex(x-1)$. **1pt**

3) Déduire de la question précédente la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point A (1, 0). **1pt**

EXERCICE 4 / 5pts

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$.

1) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations (On étudiera aussi les branches infinies). **1,5pt**

2) Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm sur les axes). **1pt**

3) Résoudre graphiquement dans IR les inéquations : f(x) > x. **0,5pt**

4) Montrer que f définit une bijection de]-1, + ∞ [dans IR. **0,5pt**

5) La réciproque f^{-1} est-elle dérivable sur IR ? Justifier. **0,5pt**

6) Vérifier que $f(0) = f^{-1}(0)$ et $f(1) = f^{-1}(1)$. **0,5pt**

On pose dans la suite, $g = f^{-1}$, bijection réciproque de f.

7) Déterminer g' (0). **0,5pt**

EXERCICE 5/ 5pts

On considère la suite (U_n) $n \in$ IN* définie par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

1) Calculer le troisième terme de la suite (U_n). **0,5pt**

2) Montrer que pour tout entier non nul n, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1})$. **0,5pt**

3) Montrer que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $x \geq \ln(1+x)$ (1) **1pt**

4) Donner une interprétation graphique de l'inégalité (1). **0,5pt**

5) En utilisant l'inégalité (1), montrer que la suite (U_n) est décroissante. **0,5pt**

6) On pose $V_n = U_n - \frac{1}{n}$ pour tout n entier naturel non nul ;

a) Montrer que $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$. **0,5pt**

b) En déduire que la suite (V_n) est croissante. **0,5pt**

7) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq V_n \leq U_n$. **0,5pt**

8) En déduire que la suite (U_n) est convergente. **0,5pt**

Fin de l'épreuve