PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 22 Mai 2010

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, CI, GCEA/L

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (4 POINTS) :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A tout point M d'affixe Z différente de 1, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+z}{1-z}$$

1- Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M. **1,00pt**
2- Soit D la droite d'équation x = 0.
Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
Montrer que, lorsque M décrit la droite D, M' se déplace sur le cercle Γ. **1,00pt**
3- a) Montrer que, lorsque M décrit le cercle Γ privé du point A d'affixe 1, M' se déplace sur une droite. Précisez cette droite. **1,00pt**
b) Montrer que si le point M est un point de Γ différent de A, alors les points A, M et M' sont alignés. En déduire, dans ce cas, une construction de M' connaissant M. **1,00pt**

EXERCICE 2 (4 POINTS) :

I/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$

1- Exprimer S_n en fonction de n. **0,75pt**
2- Calculer la limite de S_n. **0,75pt**

II/ (U_n) est la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$U_1 = 0{,}4$; $U_2 = 0{,}44$; $U_3 = 0{,}444$; …. et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 0{,}44\ldots4$ (n chiffre 4).
1- a) Prouver que : **0,50pt**

$$U_{n+1} = \frac{1}{10}U_n + U_1$$

b) En déduire par récurrence que : **1,00pt**

$$U_n = U_1 + \frac{1}{10}U_1 + \frac{1}{100}U_1 + \cdots + \frac{1}{10^n}U_1$$

2- Déduire (U_n) en fonction de n et donner sa limite. **1,00pt**

TSVP ➔

EXERCICE 3 (4 POINTS) :

Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On désigne par Pi la probabilité de tirer la boule numéro i de cette urne ; avec $i \in \{1,2,3,4\}$.

P1, P2, P3 et P4 sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{12}$

1- Montrer que : **0,50pt**

$$P_1 = \frac{1}{8}$$

2- Calculer alors P2, P3 et P4. **0,75pt**

3- On tire 5 fois de suite une boule de l'urne, en remettant chaque fois la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a tiré la boule numéro 1.

a) Définir la loi de probabilité de X. **1,00pt**

b) Calculer E(X) l'expérience mathématique de X et V(X) sa variance. **1,00pt**

4- On procède à n tirages successifs ($n \geq 1$) d'une boule, (toujours avec remise). On note U_n la probabilité d'obtenir au-moins une fois la boule numéro 1.

Calculer U_n en fonction de n puis $\lim_{x\to+\infty} U_n$. **0,75pt**

EXERCICE 4 (4 POINTS)

On considère les fonctions g et h définies par, (ln désignant le logarithme népérien) :

$$\mathrm{g(x)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{h(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

On note (C_g) et (C_h) leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1- Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g est impaire. **1,00pt**

2- Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. **1,00pt**

3- Tracer la courbe (C_h) de h dans le plan. **0,50pt**

4- Calculer la dérivée première de g et déduire l'aire du domaine plan limité par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 3. **1,00pt**

5- Déterminer le réel a sachant que la courbe (C_g) de la fonction g passe par le point A(a,ln 2). **0,50pt**

EXERCICE 5 (4 POINTS)

1- Déterminer le module et un argument du complexe $4\sqrt{3} + 4i$. **0,50pt**

2- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $Z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$.

a) en posant Z = x + iy (on pourra remarquer que $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$). **1,00pt**

b) en écrivant Z sous la forme $Z = re^{i\theta}$. **1,00pt**

3- Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$. **1,00pt**

4- Déterminer les entiers naturels n tels que le complexe $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$ soit un réel. **0,50pt**

Fin de l'épreuve