PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 25 Mai 2011

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, CI, GCEA/L

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (7.5 POINTS) :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E1) : $4e^{x} + 15e^{-x} - 19 = 0$ **0.75pt**

(E2) : $7^{x+\frac{4}{3}} = 5^{x+\frac{1}{3}}$ **0.75pt**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 3x - 4y^2 + 2z = -17 \\ -5x + 7y^2 + 3z = 12 \\ 2x - y^2 - 4z = 18 \end{cases}$$ **1.50pt**

3) z est un nombre complexe déterminé par $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} - i.\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

a) Calculer z^2 ; puis déterminer le module et un argument de z^2 **1.00pt**

b) En déduire le module et un argument de z **1.00pt**

4) Dans le plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-2}{z+2i}$ où z est différent de -2i. Le point A a pour affixe 2 et le point B a pour affixe -2i.

a) Donner une interprétation géométrique du module de z' et de l'argument de z' en fonction des points A, B et M. **0.50pt**

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M pour lesquels z' est un nombre réel **1.00pt**

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M pour lesquels z' est un nombre imaginaire pur **1.00pt**

NB : Faire les deux dessins sur le même repère

EXERCICE 2 (2.5 POINTS)

On considère les intégrales suivantes : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x.dx$ et $j_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x.dx$ où n est un entier naturel.

1) Calculer les intégrales I_0 et J_0. **0.50pt**

2) On suppose dans la suite du problème que $n \geq 1$.

a) En intégrant par parties I_n et J_n montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{\frac{-n\pi}{2}} \end{cases}$ **1.00pt**

b) Déterminer en fonction de n les expressions de I_n et J_n **0.50pt**

c) Déterminer les limites de I_n et J_n lorsque n tend vers $+\infty$ **0.50pt**

EXERCICE 3 (4.5 POINTS)

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1-2x).e^{2x}$.

On note $h^{(1)}$, $h^{(2)}$; $h^{(3)}$; … ; $h^{(n)}$ les dérivées première, seconde, troisième, … ; $n^{\text{ième}}$ de h.

1) Calculer pour tout x réel, $h^{(1)}(x)$; $h^{(2)}(x)$ et $h^{(3)}(x)$. **0.75pt**

2) a) Montrer que pour tout réel x, $h^{(2)}(x) - h^{(1)}(x) - 2.h(x) = -6e^{2x}$. **0.50pt**

b) Déduire une primitive H de h sur $\mathbb{R}$. **0.50pt**

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$h^{(n)}(x) = 2^n.(1-n-2x).e^{2x}.$$ **0.75pt**

4) Pour tout entier naturel n non nul, la courbe de $h^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n.

a) Déterminer les coordonnées x_n et y_n de M_n. **0.50pt**

b) Vérifier que tous les points M_n appartiennent à la courbe Γ d'équation $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$ **0.50pt**

c) Vérifier que la suite (x_n) est 1 suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison. **0.50pt**

d) Vérifier que la suite (y_n) est 1 suite géométrique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison. **0.50pt**

EXERCICE 4 (5.5 POINTS)

Soit la fonction f de variable réelle x définie par : f(x) = $\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ où ln est le logarithme népérien.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et montrer que f est une fonction impaire. **0.50pt**

b) Montrer que f est dérivable sur D_f, calculer sa dérivée et donner son signe. **1.00pt**

c) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **0.50pt**

d) En déduire le tableau de variation de f. **0.50pt**

e) Montrer que f admet une bijection réciproque g que l'on déterminera. **0.75pt**

2) Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

a) Etudier les branches infinies de la courbe C_f. **0.50pt**

b) Tracer la courbe C_f de f, puis celle de g en pointillés dans le même repère. **1.00pt**

3) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α, par une intégration par parties l'aire A_α du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équation y = 0 ; x = 0 et x = α. **0.75pt**

Fin de l'épreuve