PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 24 Mai 2012

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCEA/L

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5,5 POINTS)

1) On donne une suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - n^2 + n$ (1)

1) a) Déterminer un polynôme du second degré P tel que la suite de terme général $a_n = P(n)$ vérifie la relation de récurrence (1) **1.00pt**

1) b) Démontrer que la suite de terme général $v_n = u_n - a_n$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme **1.00pt**

1) c) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n **0.50pt**

1) d) Etudier la convergence des suites v_n et u_n **0.50pt**

2) Une urne contient $n + 8$ boules ($n \geq 2$) dont 8 boules blanches et n boules noires toutes indiscernables au toucher. Un joueur effectue deux tirages : il tire une première boule de l'urne, note sa couleur et la remet dans l'urne, puis un deuxième tirage. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 200F mais pour chaque noire, il perd 400F. Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

2) a) Déterminer les valeurs possibles de X **0.50pt**

2) b) Déterminer la loi de probabilité de X **1.00pt**

2) c) Calculer en fonction de n, l'espérance mathématique de X. Y a-t-il une valeur de l'entier n pour laquelle cette espérance est nulle ? **1.00pt**

EXERCICE 2 (4,5 POINTS) :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$; $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0,50pt**

1) b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. **0,50pt**

2) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S dont on déterminera l'expression complexe telle que S(A) = B et S(B) = C. **1,00pt**

3) Déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω de Ω, centre de S. **1,00pt**

4) a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1-\omega}{z_1-z_0}$. **0,50pt**

4) b) Déduire la nature exacte du triangle ΩAB. **0,50pt**

5) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ΩAB. **0,50pt**

PROBLEME (10 POINTS)

Partie A

f est une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x+1}$

1) Calculer la dérivée f'(x) et la dérivée seconde f''(x) **1.00pt**

2) Démontrer que la fonction dérivée f' est croissante sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et déduire un encadrement de f'(x) sur l'intervalle $[0, 3]$ **1.00pt**

3) Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0, 3]$

3) a) Encadrer $f(x)$ par deux fonctions affines qu'on précisera (appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0, x]$) **0.75pt**

3) b) Encadrer $f(x)$ par deux autres fonctions affines qu'on précisera (appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x, 3]$) **0.75pt**

3) c) Vérifier que deux des quatre fonctions affines trouvées plus haut sont les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 3 **1.00pt**

4) Dresser le tableau de variation de f, puis construire la courbe de f et les deux tangentes en 0 et en 3 (prendre 2 cm sur les axes) **1.50pt**

Partie B

On se propose de déterminer les fonctions h dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : pour tout réel x,

$$(E1) : h'(x) - 2.h(x) = e^{x}.\cos(x).$$

1) Soit h une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $h(x) = g(x).e^{2x}$. Calculer h' en fonction de g et g'. **0,50pt**

2) Montrer que la fonction h est solution de l'équation (E1) si et seulement si g vérifie pour tout réel x

$$g'(x) = e^{-x}.\cos(x) \qquad (E2)$$ **1,00pt**

3) a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x}\,[(\sin(x) - \cos(x)]$ est une primitive de la fonction k définie par $k(x) = e^{-x}.\cos(x)$ **0,50pt**

3) b) Déduire toutes les fonctions g solution de (E2) **0,50pt**

4) Quelles sont les fonctions solutions de (E1) ? **0,50pt**

5) Déterminer les solutions h de (E1) vérifiant $h(\frac{\pi}{4}) = 0$. **1,00pt**

Fin de l'épreuve