PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 23 Juillet 2012

CONCOURS D'ADMISSION
SESSION DE JUILLET
SERIE D, E, F, GCEA/L

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5 POINTS)

On se propose de résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$(E) : 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0.$$

1) Comparer $P(\overline{z})$ et $\overline{P(z)}$ où P est le polynôme complexe défini par :

$$P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2.$$ **1.00pt**

2) a) Montrer que si z_0 est une racine du polynôme P, alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi une racine de P. **1.00pt**

2) b) Déduire que si z_0 est une racine du polynôme P alors $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi des racines de P. **1.00pt**

3) Montrer qu'il existe une solution de P de la forme a + i où a est un réel que l'on déterminera. **1.00pt**

4) Déduire toutes les solutions de l'équation (E) et les mettre sous forme exponentielle. **1.00pt**

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Soient (a_n) et (b_n) les suites numériques définies par $a_0 = 2$; $b_0 = 3$ et pour tout n entier naturel,

$a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n)$.

1) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$.

1) a) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. **0.50pt**

1) b) Déduire l'expression de u_n pour tout entier naturel n. **0.50pt**

2) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$.

2) a) Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. **0.50pt**

2) b) Exprimer v_n en fonction de n. **0.50pt**

2) c) La suite (v_n) est-elle convergente ? **0.50pt**

3) Exprimer a_n et b_n en fonction de n. **1.00pt**

4) Calculer les limites si elles existent des suites (a_n) et (b_n). **0.50pt**

EXERCICE 3 (2,5 POINTS)

On donne la fonction polynôme défini par $f_n(x) = (x+1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer une primitive F_n de f_n. **0.50pt**

2) Calculer la valeur de l'intégrale $A = \int_0^1 f_n(x)dx$. **0.50pt**

3) A l'aide de la formule du Binôme, donner l'expression développée de $f_n(x)$, puis calculer sous une autre forme l'intégrale $A = \int_0^1 f_n(x)dx$ **1.00pt**

4) En déduire la valeur de la somme $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \quad + \quad + \frac{1}{n+1}C_n^n$. **0.50pt**

PROBLEME (8,5 POINTS) :

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x.e^x - 1$.

1) a) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g. **1,50pt**

1) b) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}. **1,00pt**

1) c) Préciser le signe de g(x) suivant les valeurs de x. **0,50pt**

2) On donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$ et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

2) a) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. **0,50pt**

2) b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha$ et à partir de la question 1) b), donner un encadrement de f(α) d'amplitude 5×10^{-1}. **1,00pt**

2) c) Calculer la dérivée f'(x) ; puis exprimer celle-ci en fonction de g(x). **0,50pt**

2) d) Donner le sens de variation de f et dresser un tableau de variation. **1,00pt**

2) e) Démontrer que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (0J). **0,50pt**

2) f) Construire la courbe de f. **1,00pt**

2) g) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe (OI) et les droites d'équations x=1 et x=α. **1,00pt**

Fin de l'épreuve