PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé le 22 Mai 2013

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (6 POINTS) :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) avec OI=OJ=2cm. On considère une autre fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Etude de la fonction auxiliaire g

1) a) Calculer les limites de g en $+\infty\ et - \infty$ **0,50pt**

1) b) Calculer la dérivée de g et dresser le tableau de variation de g **0,50pt**

1) c) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α telle que $0{,}35 \leq \alpha \leq 0{,}36$ et déduire le signe de g en fonction de α **1,00pt**

2) Etude de la fonction f

2) a) Calculer les limites de f en $+\infty\ et - \infty$ **0,50pt**

2) b) Démontrer que f$(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ et à l'aide de l'encadrement de α ; déterminer un encadrement de f(α) d'amplitude 4×10^{-2} **1,00pt**

2) c) Calculer la dérivée f'(x) et dresser le tableau de variation de f **0,75pt**

2) d) Démontrer que la droite (D) d'équation y=x-1 est asymptote à (C_f) en $+\infty$ **0,25pt**

2) e) Préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D) **0,25pt**

2) f) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(C_f)\ en\ 0$ **0,25pt**

2) g) Construire (T), la droite (D) et la courbe de f **1,00pt**

EXERCICE 2 : (5,5 POINTS)

1) On donne le polynôme à variable complexe z défini par

$$P(z) = z^3 + 2(1-i)z^2 + 2(1-2i)z - 4i$$

1) a) Déterminer un nombre réel α tel que αi soit une solution de P **0,50pt**

1) b) Déterminer un polynôme Q de degré 2 tel que $P(z) = (z - i\alpha)Q(z)$ **0,50pt**

1) c) Résoudre dans C l'équation P(z)=0 **1,00pt**

2) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i, c = 2i\ et\ d = 2 - 2i$

2) a) Placer les points A, B, C et D dans le plan P **1,00pt**

2) b) Exprimer les nombres complexes $q_1 = \frac{c-a}{d-a}$ et $q_2 = \frac{c-b}{d-b}$ sous forme algébrique ; puis en déduire le module et un argument de q_1 et de q_2 **1,50pt**

2) c) Montrer que le quadrilatère ABDC est inscrit dans un cercle dont on précisera une équation cartésienne. **1,00pt**

EXERCICE 3 (4 POINTS) :

On considère l'équation différentielle (E_1) : y'' – 3y' + 2y = 8x² - 24x où y désigne une fonction numérique d'finie sur IR, y' la dérivée première et y'' la dérivée seconde.

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction g définie sur IR par g(x) = ax² + bx +c soit solution sur IR de l'équation différentielle (E_1). **1,00pt**

2) Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivables sur IR est solution sur IR de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si la fonction h = f – g est solution sur IR de l'équation différentielle (E_2) : y'' – 3y' + 2y = 0. **1,00pt**

3) Résoudre l'équation différentielle (E_2) et en déduire les solutions sur IR de l'équation différentielle (E_1). **1,00pt**

4) Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E_1) telle que

f(0) = 0 et f '(0) = 0. **1,00pt**

EXERCICE 4 (4,5 POINTS) :

1) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3 \quad et\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$

1) a) Calculer $u_1 \ et\ u_2$ **0,50pt**

1) b) Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ **0,50pt**

1) c) Déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ et conclure **0,50pt**

1) d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite **0,50pt**

2) Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

2) a) On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

2) a) 1) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche. **0,50pt**

2) a) 2) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces tirages **1,00pt**

2) b) On effectue maintenant n tirages successifs avec remise ($n \in IN^*$). On appelle p_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage. Calculer p_1, p_2, p_3 et p_n. **1,00pt**

Fin de l'épreuve