PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 22 Mai 2014

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 : (5,5 POINTS)

1) On veut résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 3.\ln(x) + 2.e^y - 5.z^2 = -21 \\ -2.\ln(x) + 3.e^y - z^2 = 1 \\ -\ln(x) + 5.e^y - 3.z^2 = -6 \end{cases} \quad (S)$$

1) a) Préciser les changements des variables du système (S) qui ont conduit à l'obtention du système (S') ci-dessous : **0,75pt**

$$\begin{cases} 3X + 2Y - 5Z = -21 \\ -2X + 3Y - Z = 1 \\ -X + 5Y - 3Z = -6 \end{cases} \quad (S')$$

1) b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S'). **0,75pt**

1) c) En déduire la solution du système (S). **1,00pt**

2) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On choisit une urne, puis un jeton dans cette urne. La probabilité de choisir l'urne U_1 est le double de celle de choisir U_2.

2) a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ? **1,00pt**

2) b) On a tiré un jeton portant le numéro 1.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ? **1,00pt**

2) c) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons portant le même numéro ? **1,00pt**

PROBLEME (10 POINTS) :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{2x-2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(On prendra 5 cm comme unité sur les axes).

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. **0,50pt**

1) b) Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$. **1,00pt**

2) Déterminer $f\,'$. Etudier le signe de $f\,'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f. **1,00pt**

3) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).

Etudier la position relative de (C) et (D). **1,00pt**

4) On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C). **0,50pt**

5) a) On note I l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution que l'on notera a. **0,50pt**

5) b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} de a. **0,50pt**

6) Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T). **1,50pt**

Partie B : Détermination d'une valeur approchée de a

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x-2}$.

Démontrer que $f(x) = 0$ est équivalent à $g(x) = x$.

En déduire $g(a)$ en fonction de a. **0,50pt**

2) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$. **0,50pt**

3) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I. **0,50pt**

4) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier n : **0,50pt**

$$|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|U_n - a|$$

5) Démontrer, par récurrence, que : $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. **1,00pt**

6) En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite. **0,50pt**

EXERCICE 2 (4,5 POINTS) :

Le plan est muni d'un repère ortho normal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$$

1) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ. **1,00pt**

2) Soit M_0 le point d'affixe $1 + 3i$. Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par :

$$M_{n+1} = f(M_n).$$

Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4. **1,00pt**

3) a) Calculer la distance M_0M_1. **0,50pt**

3) b) Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_nM_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. **1,00pt**

3) c) On note $L_n = d_1 + d_2 + d_3 + \ ... + d_n$.

Calculer L_n en fonction de n et en déduire la limite de L_n en $+\infty$. **1,00pt**

Fin de l'épreuve