partenaire de

PREPAVOGT

B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 22 01 63 72 / 96 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, 23 mai 2014

ESSCA(Management - Finances)

CONCOURS D'ADMISSION

RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHEMATIQUE
DUREE : 3h00

Nombre de pages : 09

L'épreuve se décompose en 3 parties. Chaque question se compose de 4 propositions pour lesquelles le candidat doit indiquer si elles sont vraies ou fausses. Toutes les réponses sont possibles. Par exemple, dans une même question, les propositions peuvent être toutes vraies, ou toutes fausses.

1re partie :
Raisonnement logique
Le candidat mettra en œuvre des outils simples adaptés à la résolution des exercices proposés. Il devra faire preuve d'adaptation rapide d'une question à l'autre, les questions étant indépendantes.

2e partie :
Raisonnement mathématique
Dans cette partie plus classique, le candidat devra démontrer sa maîtrise des outils faisant partie du programme de mathématiques des filières générales du baccalauréat. Les questions y sont également indépendantes.

3e partie :
Problème mathématique
Dans cette partie, les questions peuvent être dépendantes. Le candidat pourra donc exploiter les résultats obtenus précédemment pour répondre aux questions suivantes.

Chaque question comporte quatre items, notés **A. B. C. D.** Pour chaque item, vous devez signaler s'il est vrai en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre V ; ou faux en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre F

Important : l'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite.

PARTIE A : RAISONNEMENT LOGIQUE (Exercices 1 à 6).

Exercice1

Deux montres marchent en même temps. En les regardant, on constate que l'une retarde de deux minutes par heure et l'autre avance d'une minute par heure. Après quelque temps, on constate en regardant de nouveau que, celle qui avance indique exactement une heure de plus que l'autre.

A : De ces informations il y a à chaque heure 3 mn d'écart entre les deux montres.

B : Les deux montres ont marché pendant 20 heures.

C : Les deux montres ont marché pendant 12 heures.

D : Les deux montres se sont retrouvées au moins une fois à la même heure.

Exercice 2

L'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ est un univers sur lequel on définit une probabilité p

A : Si $p(\{a, b, c\}) = \frac{3}{5}$ et $p(\{a, d, e\}) = \frac{9}{20}$ alors $p(\{a, e\}) \geq \frac{1}{20}$

On suppose pour les questions B) et C) que E et F sont deux événements de l'univers Ω tels que $p(E) = \frac{2}{3}$ $p(F) = \frac{3}{5}$ et $p(E \cap \bar{F}) = \frac{4}{15}$

B : On a $p(E \cup F) = \frac{13}{15}$

C : Les événements E et F sont indépendants.

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, portant les lettres a, b, c, d , e respectivement. On effectue 5 tirages successifs d'une boule avec remise. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

D : La probabilité de tirer exactement 2 fois une voyelle est $q = \frac{2^2.3^3}{5^5}$

Exercice 3

Des comparaisons

A : La comparaison des nombres $A_1 = 1{,}389\,235\,478^3 - 3 \times 1{,}389\,235\,478^2 + 5$ et $B_1 = 1{,}389235479^3 - 3 \times 1{,}389235479^2 + 5$ donne $A_1 < B_1$.

B : La comparaison des nombres $A_2 = 3{,}389\,235\,478^3 - 3 \times 3{,}389\,235\,478^2 + 5$ et

$B_2 = 3{,}389\,235\,478^3 - 3 \times 3{,}389\,235\,478^2 + 5$ donne $A_2 < B_2$.

C : La comparaison des nombres $A_3 = \frac{\sqrt{5}(1{,}398075)^2}{1-1{,}398075}$ et $B_3 = \frac{\sqrt{5}(1{,}398076)^2}{1-1{,}398076}$ donne $A_3 < B_3$.

D : la comparaison des nombres $A_4 = \frac{\sqrt{5}(3{,}398075)^2}{1-3{,}398075}$ et $B_4 = \frac{\sqrt{5}(3{,}398076)^2}{1-3{,}398076}$ donne $A_4 < B_4$.

Exercice 4

Un meuble est composé de 10 urnes U_1, U_2, …, U_{10}. Une personne place au hasard une boule dans l'une des urnes et une autre personne est chargée de la retrouver à l'aide de la stratégie suivante : La personne ouvre l'urne U_1. Si la boule est dans l'urne U_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre l'urne U_2 et ainsi de suite …. en respectant l'ordre des numéros des urnes.
On désigne par B_i l'événement « la boule se trouve dans l'urne U_i », où $1 \leq i \leq 10$ et $P(B_i)$ sa probabilité. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'urnes qui ont été ouvertes afin de localiser la boule avec cette stratégie.

A : Avec cette stratégie, l'urne U_{10} ne sera jamais ouverte.
B : Les probabilités des événements $[X = 9]$ et $B_9 \cup B_{10}$ sont égales.
C : La probabilité de l'événement B_i où $1 < i < 10$ est $p = \dfrac{9^{i-1}}{10^i}$.
D : La loi de probabilité de X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{10}$.

Exercice 5

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n - 2n$

A : La suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $-2n$.

B : Pour tout entier naturel n, $U_n = -n(n + 1)$.

C : La suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{U_n}{n^2}$ est convergente.

D : La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ est croissante.

Exercice 6

Pour remplir un bassin, on dispose de trois robinets A, B et C. Avec A et B, le bassin se remplit en 20mn ; avec B et C, le bassin se remplit en 15mn et avec A et C, le bassin se remplit en 12mn. On note V le volume du bassin, x, y et z les débits respectifs en minute des robinets A, B et C.

A : De l'énoncé, on déduit que $x + y + z = \dfrac{V}{10}$.

B : De l'énoncé, on déduit que $x = \dfrac{V}{30}$; $y = \dfrac{V}{60}$ et $z = \dfrac{V}{20}$.

C : Pour remplir le bassin avec chacun des trois robinets fonctionnant seul, il faut 30mn pour A, 1 heure pour B et 20 mn pour C.
D : Pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts, il faut 10 minutes.

PARTIE B: **RAISONNEMENT MATHEMATIQUE (Exercices 7 à 18)**

Exercice 7

Soit α un réel dans $[0, \pi]$ et E_α l'équation $z^2 + 2(\sin\alpha)z + 1 = 0$ d'inconnue z.
A : Pour tout réel α dans $[0, \pi]$, l'équation E_α admet deux racines complexes conjuguées distinctes.
B : Pour tout réel α dans $[0, \pi]$, l'équation E_α admet pour solutions $z_1 = \sin\alpha - i\cos\alpha$ et $z_2 = \sin\alpha + i\cos\alpha$.
C : Pour tout réel α dans $[0, \pi]$, l'équation E_α admet pour solutions les complexes $z_2 = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$ et $z_2 = e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$.
D : Il existe un unique réel α dans $[0, \pi]$ pour lequel i est solution de l'équation E_α.

Exercice 8

On lance trois fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par a, b et c les numéros obtenus aux premier, deuxième et troisième lancers et on considère le système d'inconnues réelles x et y suivant : (S) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$.

A : La probabilité de ‘‘le système (S) admet dans IR une infinité de solutions’’ est $\frac{2}{216}$

B : La probabilité de ‘‘le système (S) n'admet pas de solution’’ est $\frac{213}{216}$.

C : La probabilité de ‘‘le système (S) admet dans IR une unique solution’’ est $\frac{1}{216}$.

D : La probabilité de ‘‘le système (S) admet dans IR une unique solution, le couple (3, 0) ’’ est $\frac{10}{216}$.

Exercice 9

Un agriculteur cherche à placer au 1er janvier 2013 un capital de 2 000 000F. On lui propose deux placements :
Le premier placement à intérêts composés, au taux annuel de 10%.
Le deuxième placement à intérêts simples, au taux annuel de 15%.

On note $u_o = 2\,000\,000$; u_n le capital acquis au bout de n années pour le premier placement et v_n le capital acquis au bout de n années pour le deuxième placement.

A : En fonction de n, $v_n = (2{,}15)^n u_o$.

B : S'il a choisit le premier placement, il pourra s'acheter une machine d'occasion qui coûte 4 500 000 F au bout de 5 ans.

C : Son capital aura doublé au bout de 7 ans s'il choisit le premier placement.

D : A partir de la neuvième année, le placement le plus avantageux est le deuxième placement.

Exercice 10

Soit (Z_n) la suite des nombres complexes définie par : $Z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = -\frac{1}{2}Z_n$. On pose pour e entier naturel, $U_n = |Z_n|$ et $V_n = \arg(Z_n)$.

A : La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = \sqrt{2}$.

B : La suite (V_n) est une suite arithmétique de raison π et de premier terme $\frac{\pi}{4}$.

C : Sous forme trigonométrique et en fonction de n, $Z_n = \sqrt{2}\,(\frac{1}{2})^n e^{i(\frac{\pi}{4} + n\pi)}$.

D : Les entiers naturels n tels que z_0^n soit imaginaire pur sont de la forme n = 4k + 2 où k est un entier naturel.

Exercice 11

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)dx$ et pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)dx$.

A : La suite (In) est une suite croissante.

B : Le calcul de I_0 nous donne $I_0 = \frac{1}{3}$.

C : Le calcul de I_1 nous donne $I_1 = \frac{1}{9}$.

D : Par une intégration par parties, $I_{n+2} = \frac{1}{9}(n+2)(\frac{\pi}{6})^{n+1} + \frac{1}{9}(n+1)(n+2)I_n$.

Exercice 12

Soit la fonction g définie sur]0, +∞[par $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$.

A : La fonction g est dérivable sur]0, +∞[et $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$.

B : Déterminer le signe de g(x) revient à étudier ses variations.

C : Déterminer le signe de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ revient à déterminer le signe de g(x).

D : La limite de la fonction f en 0 est égale à -∞.

<u>Enoncé suivant :</u>

Pour modéliser le comportement du consommateur devant les choix qu'il peut faire les économistes ont recours à la notion de « fonction de satisfaction ». Nous en présentons ici un cas simple : nous nous intéressons au choix entre la viande et le poisson. Si l'on note x le poids (en kg) de viande achetée par mois et y le poids (en kg) du poisson acheté par mois, on suppose que la « fonction de satisfaction » pour le couple (x, y) est égale à xy.

Exercice 13

A : La « fonction de satisfaction » pour l'achat de 3,2kg de viande et 0,9kg de poisson est 288.

B : La courbe d'équation $y = \frac{7}{2x}$ est l'ensemble E_1 des points M de coordonnées (x, y) correspondant à une « fonction de satisfaction » de 3,5.

On suppose que le kilogramme de viande coûte 90F et le kilogramme de poisson coûte 70F. De plus, le budget du consommateur est de 350F par mois pour les achats de viande et de poisson.

C : L'ensemble E_2 des points du plan de coordonnées (x, y) correspondant à des achats utilisant entièrement le budget est la droite d'équation $9x + 7y = 35$.

D : Déterminer graphiquement les valeurs de x et y pour lesquelles la « fonction de satisfaction » est de 3,5 revient à résoudre le système : $\begin{cases} 9x + 7y = 35 \\ 2xy = 7 \end{cases}$.

Exercice 14

On suppose que le consommateur cherche à maximiser sa « fonction de satisfaction ». On admet que cela se produit pour la valeur k telle que la droite D d'équation $9x + 7y = 35$ soit tangente à la courbe H d'équation $y = \frac{K}{x}$.

A : De l'énoncé, on peut déduire que k est toujours positif.

B : Si (α, β) est le couple de coordonnées du point T de tangence, alors $\frac{9}{7} = \frac{k}{\alpha^2}$.

C : Déterminer α, β et k traduisant le fait que le point T(α, β) appartient à D et à H, revient à résoudre le système : $\begin{cases} 9\alpha + 7\beta = 7 \\ \alpha\beta = k \\ 7K + 9\alpha^2 = 0 \end{cases}$.

D : la droite D et la courbe H se coupent au seul point T.

<u>Enoncé suivant :</u>

On désigne par A, B et C les ensembles respectifs des lecteurs de trois revues 𝒜, ℬ et 𝒞. Une enquête a permis d'estimer le nombre de lecteurs de ces trois revues. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Ensemble	**A**	**B**	**C**	**A∩B**	**A∩C**	**B∩C**	**A∩B∩C**
Nombres d'éléments	**2280**	**1950**	**1460**	**930**	**430**	**330**	**110**

Exercice 15

A : Le nombre de personne lisant une au moins des trois revues est 5 690.

B : Le nombre de personne lisant une seule des trois revues est 2 640.

C : Le nombre de personne lisant deux de ces trois revues est 1360.

D : En langage ensembliste à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$ et des ensembles A, B, C , $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$; l'ensemble des lecteurs des revues B ou C et non lecteurs de la revue A, est $(B \cup C) \cap \overline{A}$.

Exercice 16

Une campagne publicitaire pour un article est lancée dans la revue 𝒜. L'annonceur désire compléter par une diffusion dans une deuxième revue.

A : Pour bénéficier du maximum de lecteurs supplémentaires, il doit choisir la revue ℬ.

B : Pour bénéficier du minimum de lecteurs supplémentaires, il doit choisir la revue ℬ.

C : En choisissant la revue ℬ, il aura 1950 lecteurs supplémentaires.

D : En choisissant la revue ℬ, il aura 800 lecteurs supplémentaires.

Exercice 17

Les coûts d'une campagne publicitaire pour un annonceur dans les revues 𝒜, ℬ et 𝒞 sont respectivement 45 000F ; 40 000F et 32 000F. On sait aussi que 10% des lecteurs d'une revue contenant une publicité pour cet article l'achètent. Ce fabriquant réalise un bénéfice de 0,8F par article vendu. Il décide d'engager une campagne publicitaire dans deux de ces revues, dont 𝒜.

A : Pour espérer réaliser le profit maximal, il doit choisir $\mathcal{B}$ comme seconde revue.

B : Pour espérer réaliser le profit maximal, il doit choisir $\mathcal{C}$ comme seconde revue.

C : Si le prix de vente d'un article est P, son bénéfice s'il choisit $\mathcal{B}$, 1950P – 40 000.

D : Si le prix de vente d'un article est P, son bénéfice s'il choisit $\mathcal{C}$, 81P – 32 000.

Exercice 18

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \dfrac{1}{2n+1}$ $\quad I_n = \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx$

$A_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} U_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k U_{n-k}$.

A : Pour tout entier naturel n, $A_n = B_n$.

B : Pour tout entier naturel n, $A_n = I_n$.

C : Par une intégration par parties, $I_{n+1} = -\dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$.

D : La suite (I_n) est une suite convergente.

PARTIE C : PROBLEME MATHEMATIQUE (Exercices 19 à 24)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction numérique h_n définie par $h_n(x) = \dfrac{(\ln|x|)^n}{x^2}$. On note C_n la courbe de h_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Exercice 19

On se place dans le cas n = 1. Soit g la restriction de h_1 à]0, +∞ [
A : La fonction g est une bijection de]0, +∞ [vers]-∞, 0 [
B : L'équation g(x) = -5 admet dans]0, +∞ [une unique solution.
C : La courbe C_g admet un unique point où la tangente est parallèle à la première bissectrice.

D : Une primitive de g sur]0, +∞ [est G : $x \mapsto G(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2x}$.

Exercice 20

A : La fonction h_n est une fonction positive.
B : La courbe C_n admet un axe de symétrie.
C : Les limites de h_n en $-\infty$ et en $+\infty$ sont égales.
D : Toutes le courbes C_n passent par quatre points fixes.

Exercice 21

A : Pour tout x>0, $h_n'(x) = \dfrac{(\ln x)^{n-1}(n - 2\ln x)}{x^3}$.
B : Pour tout n>1, la fonction h_n admet un extremum en x = 1..
C : La limite de h_n en $+\infty$ est nulle.
D : Pour tout entier n impair, $\lim\limits_{x \to 0^+} h_n(x) = -\infty$.

Exercice 22

Soit g_n la restriction de h_n à l'intervalle $[1, +\infty[$.

A : La courbe de g_1 est au-dessus de la courbe de g_2 sur l'intervalle [1, e].

B : La fonction g_n admet un maximum global qui est $a_n = (\dfrac{n}{2e})^n$.

C : Pour tout n > 2, $a_{n+1} \geq \dfrac{1}{2} a_n$.

D : La suite (a_n) est une suite divergente.

Exercice 23

Pour tout entier n> 1, on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e \dfrac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

A : La suite (I_n) est à termes positifs.

B : La suite (I_n) est décroissante.

C : Par une intégration par parties on a : $I_1 = \dfrac{e}{2} - 1$.

D : Pour tout entier n> 1, $0 \leq I_n \leq 1$.

Exercice 24

A : Par une intégration par parties, $I_{n+1} = (n + 1)I_n$.
B : En fonction de n, $I_n = (1 - \dfrac{1}{e}(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!})n!$.
C : La suite (I_n) converge vers 0.
D : La limite de la suite (V_n) définie par $V_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ est e.