partenaire de ESSCA ÉCOLE DE MANAGEMENT Créateurs d'avenirs

PREPAVOGT-ESSCA (Management-Finance)

1er CONCOURS OFFICIEL **RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHEMATIQUE**

SESSION DU VENDREDI 15 MAI 2015 **DUREE : 3H**

Nombre de pages du sujet (hors page de présentation) : 06

L'épreuve se décompose en 3 parties de 8 questions chacune. Chaque question se compose de 4 propositions pour lesquelles le candidat doit indiquer si elles sont vraies ou fausses. Toutes les réponses sont possibles. Par exemple, dans une même question, les propositions peuvent être toutes vraies, ou toutes fausses

Première Partie : **Raisonnement Logique**
Le candidat mettra en œuvre des outils simples adaptés à la résolution des exercices proposés. Il devra faire preuve d'adaptation rapide d'une question à l'autre, les questions étant indépendantes.

Deuxième Partie : **Raisonnement Mathématique**
Dans cette partie plus classique, le candidat devra démontrer sa maîtrise des outils faisant partie du programme de mathématiques des filières générales du baccalauréat. Les questions y sont également indépendantes.

Troisième Partie : **Problème mathématique**
Dans cette partie, les questions peuvent être dépendantes. Le candidat pourra donc exploiter les résultats obtenus précédemment pour répondre aux questions suivantes.

Chaque question comporte quatre items **A, B, C, D**. Pour chaque item, le candidat devra signaler s'il est vrai en indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous lettre **V** ; ou faux en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre **F.**

Important : ***L'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite.***

PARTIE A : RAISONNEMENT LOGIQUE (Exercices 1 à 8).

Exercice 1

A : Les nombres complexes $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ où $r > 0$ et $r' > 0$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta'$.

B : Toute suite géométrique de raison $q = 5$ est une suite strictement croissante.
C : Pour tout réel x, $2x(x - 3) = x(6x + 5) \Leftrightarrow 2x - 6 = 6x + 5$
D : Pour tout réel x, $|x| \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x^2 + 3} \leq 3$

Exercice 2
A : Pour tout entier naturel, $7^n + 1$ multiple de $6 \Rightarrow 7^{n+1} + 1$ multiple de 6.
B : Pour tous réels a et b non nuls et de même signe, $\ln(a.b) = \ln a = \ln b$.
C : Le réel $\ln[\ln|x|]$ existe si et seulement si $|x| \geq 1$.
D : Pour $\forall n \in \{ \}$, n est un entier pair.

Exercice 3

Une auto-école comprend 80 personnes parmi lesquelles 13 moniteurs en cours audio-visuel, 12 moniteurs pour la pratique et le reste les apprenants. D'autre part il y a 15 moniteurs qui s'occupent seulement des cours audio-visuels ou seulement de la pratique.

A : Le nombre de moniteurs de cette auto-école est 25.
B : Le nombre de moniteurs pouvant s'occuper à la fois des cours audio-visuels et de la pratique est 5.
C : Le nombre d'apprenants de cette auto-école est 60.
D : Le nombre de moniteurs s'occupant seulement des cours audio-visuels est 13.

Exercice 4

En réalité, cette auto-école comprend 13 moniteurs en cours audio-visuel, 12 moniteurs pour la pratique et 60 apprenants. Ces personnes se réunissent et désirent former un bureau composé de : un président ; un secrétaire et un trésorier pour conduire les travaux.

A: Le nombre de bureau que l'on peut former est 492960.
B : Le nombre de bureau comportant seulement les apprenants est 201780.
C : Le nombre de bureau dont un moniteur est président est 38038.
D : Le nombre de bureau comportant seulement des moniteurs pouvant s'occuper à la fois des cours audio-visuels et de la pratique est 60.

Exercice 5

A : Pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
On considère la suite numérique définie par $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\cos t \, dt$
B : Pour tout entier naturel n, $2U_n = e^{-(n+1)\pi}(-1)^n + e^{-(n+1)\pi}(-1)^n$

C : La suite (U_n) est une suite géométrique.
D : La suite (S_n) définie par $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ est une suite convergente.

Exercice 6

On considère l'équation dans IR d'inconnue x : (I) $e^{ax} = x$ où a est un paramètre réel.

A : Pour $x > 0$, l'équation (I) est équivalent à $\frac{\ln x}{x} = a$.
B : Pour $a > e^{-1}$, l'équation (I) n'a pas de solution dans IR.
C : Pour $0 < a < e^{-1}$, l'équation (I) admet deux solutions dans IR.
D : Pour $a < 0$, l'équation (I) a une unique solution dans IR.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - \frac{2}{x}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

A : L'ensemble de définition de f est IR*.
B : La fonction f est dérivable en -2.
C : Le point I(-2, 1) est point d'inflexion à C_f

D : Dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ la fonction f est strictement décroissante..

Exercice 8

A : La droite D : $y = -x - 2$ est asymptote oblique à C_f.
B : Le point A(0, 2) est centre de symétrie de C_f.
C : La restriction g de f à $]0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g^{-1}.
D : L'ensemble de définition de g^{-1} est $]0, +\infty[$.

<u>PARTIE B</u> : RAISONNEMENT MATHEMATIQUE (Exercices 9 à 16)

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n - n$

A : La suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -n$.

B : La suite (U_n) est une suite décroissante.

C : Comme $U_0 = 0$ et $U_1 = 0$, on déduit que la suite (U_n) est une suite constante.
D : Pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{n(1-n)}{2}$.

Exercice 10

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{n}{n+1} U_n$.

A : La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{n}{n+1}$.

B : La suite (U_n) est une suite croissante.

C : La suite (U_n) est une convergente.

D : Pour tout entier naturel n, $U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n U_0$.

Exercice 11

Au cours d'un championnat de football, une équipe joue 10 matchs. Pour chacun de ces matchs, l'équipe marque respectivement 3 ; 1 ou 0 point suivant le score du match. On appelle ″résultat″ à l'issu des 10 matchs, tout 10-uplet d'éléments de l'ensemble $\{3, 1, 0\}$

A : Le nombre de résultats possibles est 10^3 .
Le nombre de résultats correspondant à un total
B : de 15 points est 10^{15}
C : strictement supérieur à 25 points est 21.
D : strictement inférieur à 3 points est 56.

Exercice 12

Dans un championnat de football, chacune des 20 équipes doit rencontrer dans un match aller et dans un match retour toutes les autres équipes.

A : Le nombre total des matchs joués par chaque équipe est de 38.
B : Le nombre total des matchs de ce championnat est de 38×20.
Pour réduire le nombre de matchs, les 20 équipes sont réparties en 5 poules de 4 équipes ; le vainqueur de chaque poule participe à une poule finale. Sachant qu'à l'intérieur de chaque poule, chaque équipe rencontre les 3 autres dans un match aller et dans un match retour
C : Le nombre total des matchs joués par chaque équipe est de 6.
D : Le nombre total des matchs est de 72.

Exercice 13

Dans un village d'Afrique, vit un patriarche au milieu de ses enfants, petits-enfants, arrière-petits enfants et arrière-arrière-petits enfants. Chacun d'eux a le même nombre n d'enfants sauf les arrière-arrière-petits enfants qui n'ont pas encore procréé et tous sont en vie.

A : Le nombre de membres de cette famille est $\frac{n^5 - 1}{n - 1}$.
B : Le nombre de membres de petits-enfants de ce patriarche est n^2.
C : En supposant que cette famille comprend 781 personnes, le nombre d'enfants de ce patriarche est 5.
D : Le nombre de petits-enfants du premier né de ce patriarche est n^2.

Exercice 14

Des élections opposent n candidats au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois plus de voix que son suivant immédiat. Pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ on désigne par U_k le nombre de voix obtenues par le candidat placé au k-ième rang.

A : La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

B : Pour tout entier naturel n et de U_1, $U_n = 2^{n-1}U_1$.

C : Le nombre total de voix réunies est $S_n = U_1 \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.

D : Il y a eu 945 votants et le candidat élu a eu 480 voix. Le nombre de candidats à cette élection est 6.

Exercice 15

Une menuiserie fabrique deux types de lits A et B. La fabrication d'un lit de type A nécessite 9 planches et 20 heures de travail. La fabrication d'un lit de type B nécessite 11,25 planches et 20 heures de travail. La menuiserie dispose au maximum de 1350 planches et 2600 heures de travail. La vente d'un lit de type A génère 10 000F de bénéfice et celle d'un lit de type B génère 20 000F de bénéfice. On désigne par x le nombre de lits de type A et par y le nombre de lits de type B fabriqués.

A : La fabrication est possible si x et y sont supérieurs ou égaux à 0.
B : Le nombre de planches utilisées et $9x + 11{,}25y$.
C : La durée totale de fabrication des lits est $20x + 20y$
D : Le bénéfice réalisé est de $20000x + 10000y$.

Exercice 16

A : Les couples (x, y) pour lesquels la fabrication est possible sont solution du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 5y \leq 600 \\ x + y \leq 130 \end{cases}$

B : Pour avoir un bénéfice maximal, il faut fabriquer 100 lits de types A et 50 lits de type B.

C : Pour avoir un bénéfice maximal, il faut fabriquer 80 lits de types A et 50 lits de type B.
D : Le bénéfice maximal est de 1 800 000F.

PARTIE C : PROBLEME MATHEMATIQUE (Exercice de 17 à 24)

Exercice 17

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x^2 + 1}$ où y est la fonction inconnue à variable réelle non nulle x. On pose $g_a(x) = \frac{1 + \ln(ax^2 + 1)}{x}$ où a est un paramètre réel.

A : La fonction g_a est constante pour a = 0.
B : Pour tout réel a, l'ensemble de définition de la fonction g_a est IR*.
C : L'ensemble des fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x}$ où λ est un réel est l'ensemble solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x} y = 0$.
D : La fonction g_a est solution de l'équation différentielle (E) si a = 1

Exercice 18

A : La courbe de la fonction g_a admet un axe de symétrie.
B : La limite de la fonction g_a en 0^+ est 0.
C : L'équation $2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) = 2x^2$ admet une unique solution sur]0, 1[.
D : La courbe de la fonction g_a est impaire.

Exercice 19

A : La fonction $h : x \mapsto h(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.
B : La courbe de la fonction h admet un centre de symétrie.
C : La fonction k définie par $k(x) = h(x)$ si $x \neq 0$ et $k(0) = 0$ est dérivable en 0.
D : La tangente à la courbe C_k de k au point d'abscisse 0 a pour équation cartésienne $y - x = 0$.

Exercice 20

Soit la fonction F définie par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} dt$

A : L'ensemble de définition de F est IR.
B : La fonction F est impaire.
C : La fonction F est dérivable sur IR^*_+ .
D : La fonction F est strictement croissante sur IR^*_+.

Exercice 21

A : On a l'inégalité F(1) = 0.

B : Pour tout $t \geq 1$, $\frac{\ln t^2}{t} \leq \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$.

C : Pour tout $x \geq 1$, l'intégrale $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ est égale à $\frac{1}{2}\ln x^2$.

D : La limite de F en $+\infty$ est $+\infty$.

Exercice 22

A : La fonction F admet une branche parabolique d'axe (Ox).
B : Pour tout x strictement positif, $F(x) \geq 0$.
C : Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = h(x)$.
D : La fonction F vérifie $F(0) = 0$.

Exercice 23

A : Pour tout réel x, $\ln(x^2 + 1) \leq x^2$

B : Pour tout réel $x > 0$, $F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

C : La courbe C_h de la fonction h définie à l'exercice 19 est toujours au-dessus de la première bissectrice.
D : La tangente à la courbe C_F de F au point d'abscisse 1 est horizontale.

Exercice 24

A : Toutes les courbes C_a de la fonction g_a passent par un point fixe.

B : La suite (U_n) définie par $\forall n \in IN^*$, $U_n = \int_n^1 \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$ est strictement croissante.

C : La suite (U_n) définie par $\forall n \in IN^*$, $U_n = \int_n^1 \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$ est positive.

D : L'équation $F'(x) = x$ admet deux solutions distinctes dans IR^*_+ .