PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 222 31 77 63 / 696 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 19 juillet 2016

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (2,50 POINTS) :

1) a) Déterminer PGCD (2688, 3024). **0,50pt**

1) b) Résoudre dans Z x Z l'équation (E) : $2688\,x + 3024y = -3360$. **0,50pt**

2) Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Les plans $\wp$ et $\int$ ont pour équation respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

2) a) Montrer que $\wp$ et $\int$ se coupent suivant une droite (D). **1,00pt**

2) b) En déduire l'ensemble Γ des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

0,50pt

EXERCICE 2 (3,50 POINTS) :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère deux points du plan M d'affixe $m + ai$ et P d'affixe $p + ai$. Les nombres m et p sont des réels distincts. Le réel a est non nul. Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et P' est l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Exprimer en fonction de m, p et a les affixes z' de M' et z'' de P'. **1,00pt**

1) b) Montrer que la hauteur issue de O du triangle OMP est la médiane issue de O du triangle OM'P'. **0,50pt**

2) Les nombres complexes non nuls, deux à deux distincts a, b et c sont tels que $|a| = |b| = |c|$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives a, b et c. Le point D a pour affixe $a + b + c$.

2) a) Montrer que $\bar{b}c - b\bar{c}$, $(b + c)\left(\bar{b} - \bar{c}\right)$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des nombres complexes imaginaires purs.

1,00pt

2) b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux. **0,50pt**

2) c) Justifier que D est l'orthocentre du triangle ABC. **0,50pt**

EXERCICE 3 (5,50 POINTS) :

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est définie par $f_n(x) = x\ (\ln x)^n$ si $x\ > 0$ et $f_n(0) = 0$. C_n est la courbe de f_n dans un repère orthonormé (O, I, J) ayant 5 cm pour unité sur les axes.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0. **0,50pt**

1) b) Justifier que toutes les courbes C_n passent par trois points fixes. **0,50pt**

1) c) Si n est impair, C_n a alors combien de points fixes ? **0,50pt**

2) a) Etudier les variations de f_1 et tracer C_1. **1,00pt**

2) b) Soit un réel α tel que $0 < \alpha\ < 1$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire A_α du domaine plan limité par C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. **1,00pt**

3) La droite Δ a pour équation $y = x$. Pour tout réel $x \geq 0$, les points M_0, M_1 et M_2 sont de même abscisse x et respectivement situés sur Δ, C_1 et C_2.

Le point G est le barycentre des points pondérés (M_0, 1), (M_1, 2) et (M_2, 1).

3) a) Calculer les coordonnées de G. **0,50pt**

3) b) Déterminer l'ensemble Γ des points G lorsque x est dans [0, + ∞[. **0,50pt**

4) On note φ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $x' = \frac{1}{e}x$ et $y' = \frac{1}{4e}y$.

4) a) Montrer que l'écriture complexe de φ est $z' = \frac{1}{8e}(5z + 3\bar{z})$. **0,50pt**

4) b) Déterminer l'image de C_2 par φ. **0,50pt**

EXERCICE 4 (2,50 POINTS) :

On désigne par Ψ la courbe d'équation $y^2 =\ 4x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Donner sa nature et ses éléments caractéristiques. **0,50pt**

2) On donne le point Ω (1,0). Les points M(x, y) et M'(x', y') de Ψ sont tels que le segment [MM'] passe par Ω.

2) a) Montrer que $yy' = -4$ et que pour le milieu K(X, Y) du segment [MM'] on a : $Y^2 =\ 2\ (X - 1)$. **1,00pt**

2) b) Construire l'ensemble γ des milieux des segments [MM'] qui passent par Ω. **0,50pt**

2) c) Montrer que $\Omega M = x + 1$ et $\frac{1}{\Omega M} + \frac{1}{\Omega M'} = 1$. **0,50pt**

<u>EXERCICE 5 (6 POINTS) :</u>

1) $N(x, y)$ est un nombre de base 7 qui est déterminé par $N(x, y) = \overline{2x0y4}^{7}$ où x et y sont des chiffres de la numération décimale.

1) a) Donner l'écriture de $N(x, y)$ en base 10 en fonction de x et y. **0,50pt**

1) b) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que le nombre $N(x, y)$ soit divisible par 15. **1,00pt**

2) On donne f une fonction numérique définie par $f(x) = ln\left|tan\frac{x}{2}\right|$ où ln est le logarithme népérien.

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de f. **0,50pt**

2) b) Démontrer que la dérivée de f est telle que : $f'(x) = \frac{1}{sinx}$. **0,50pt**

2) c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale : **1,00pt**

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{cos^2t\ sint}$$

On prendra $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

3) A, B et C sont trois points non alignés d'un espace orienté. On désigne par I le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$ et par J le barycentre des points pondérés $(B, 1)\ et\ (C, 3)$.

3) a) Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M qui vérifie la relation : **1,00pt**

$$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

3) b) <u>Application</u> : On admet que A, B et C sont des points d'un repère orthonormé direct de l'espace et qui ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 2)$, $(2, 1, 2)$ et $(1, 0, 1)$.

3) b) i) Déterminer les coordonnées des points I et J. **0,50pt**

3) b) ii) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **0,50pt**

3) b) iii) Trouver une représentation paramétrique de l'ensemble (D). **0,50pt**

Fin de l'épreuve