PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 222 31 77 63 / 696 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 24 Mai 2016

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 (5 POINTS)

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe non nul a. Le triangle équilatéral ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{3}$ est inscrit dans un cercle de centre O.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $2\frac{\pi}{3}$ puis déterminer en fonction de a les affixes b et c des points respectifs B et C. **1,00pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -\frac{1}{2}$ puis déterminer l'ensemble des points A tels que le point M d'affixe a^3 soit le milieu de [BC]. **1,50pt**

c) On suppose que A décrit le cercle (E) de centre J d'affixe i et de rayon 2. Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que ABNC soit un losange. **0,50pt**

2. On pose $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\, cosxdx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} sinxdx.$

a) A l'aide d'une intégration par parties pour chacune des intégrales, montrer que A et B sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues u et v : **1,00pt**

$$\begin{cases} u - v = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-\pi}{4}} \\ u + v = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-\pi}{4}} \end{cases}$$

b) Calculer les valeurs exactes de A et B. **1,00pt**

EXERCICE 2 (4 POINTS)

1. Soit a un entier naturel non nul.

a) Montrer que : $a(a^2-1)$ est un multiple de 6. **0,50pt**

b) Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6. **0,50pt**

NB : On rappelle que $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

c) Soit (a_i) une suite finie d'entiers naturels avec $1 \leq i \leq 2p$. On pose :

$S = a_1 + a_2 + \cdots a_p + \cdots + a_{2p}$ et $S_n = {a_1}^{2n+1} + {a_2}^{2n+1} + \cdots + {a_p}^{2n+1} + \cdots + {a_{2p}}^{2n+1}$.

(i) Démontrer que $S_n \equiv S\ [6]$. **1,00pt**

(ii) r et r_n sont les restes respectifs de S et S_n dans la division euclidienne par 6. Montrer que $r = r_n$. **0,50pt**

2. On lance trois fois un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les résultats des premier, second et troisième jets du dé.

Quelle est la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle : $ay'' - by' + cy = 0$ soient les fonctions : $x \to (Acos\ x + Bsin\ x)e^x, o$ù $A\ et\ B$ sont des constantes réelles ? **1,50pt**

PROBLEME (11 POINTS)

NB : Le problème comporte deux parties qui sont strictement indépendantes.

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K), on donne quatre points :

$$A(2,0,1), B(3,-2,0), C(2,8,-4) \text{ et } D(3,5,3)$$

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et conclure. **0,50pt**

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD). **0,50pt**

3. On appelle H le projeté orthogonal du point C sur le plan (ABD) et on donne l'ensemble (S) des points M(x, y, z) qui vérifient l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 16y + 8z + 20 = 0$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CH). **0,50pt**

b) Calculer la distance du point C au plan (ABD). **0,50pt**

c) Démontrer que les points H et D sont confondus. **0,50pt**

d) Déterminer la nature et les caractéristiques de (S). **0,75pt**

e) Caractériser l'intersection de (S) et du plan (ABD). **0,75pt**

Partie B

Les fonctions f et g sont définies pour tout réel x par :

$$f(x) = x + (x-2)e^x \text{ et } g(x) = 1 + (x-1)e^x$$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé ayant 1 cm pour unité sur les axes.

1.

a) Etudier les variations de g. **1,00pt**

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. **0,50pt**

2.

a) Calculer la limite de f en $-\infty$. **0,25pt**

b) Démontrer que la droite (d) : y = x est asymptote à (C) puis étudier les positions de (C) par rapport à (d). **0,75pt**

3.

a) Calculer la limite de f en $+\infty$. **0,25pt**

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat. **0,50pt**

4.

a) Dresser le tableau de variations de f. **0,75pt**

b) Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α. **0,50pt**

5.

a) Déterminer les troncatures à trois décimales de $f(1,68)$ et $f(1,7)$. En déduire un encadrement de α. **0,75pt**

b) Tracer (C). **0,50pt**

6. Soit t un réel négatif.

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_t^o (x-2)e^x dx$. **0,50pt**

b) Calculer en cm^2, l'aire A(t) de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = t$, $x = 0,\ y = x$ et (C). **0,50pt**

c) Calculer la limite quand t tend vers $-\infty$ de A(t). **0,25pt**

Fin de l'épreuve