PREPAVOGT
B.P. : 765 Yaoundé
Tél. : 222 31 77 63 / 696 16 46 86
E-mail. : prepavogt@yahoo.fr
www.prepavogt.org

Yaoundé, le 24 mai 2016

CYCLE INGENIEUR

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 : (4,5 POINTS)

On donne un dé cubique dont les faces portent les numéros de 1 à 6. On désigne par P_K la probabilité d'obtenir la face portant le numéro k. Le dé est pipé de telle sorte que les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 soient dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite arithmétique. Les nombres P_1, P_2 et P_4, sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $P_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq 6$. **0,75pt**

2. On considère les évènements A « obtenir un numéro pair » et B « obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 ». On désigne par P(A) la probabilité de l'évènement A et par P(B), celle de B.

   a) Montrer que $\mathrm{P(A)} = \frac{4}{7}$, puis déterminer P(B). **0,75pt**

   b) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? **0,50pt**

3. On veut résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - 11x + 6$.

   a) Déterminer un polynôme du second degré D solution de (E). **0,50pt**

   b) Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - D$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$. **0,75pt**

   c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E'). **0,75pt**

   d) En déduire des questions b) et c) les solutions de (E). **0,50pt**

EXERCICE 2 : (5 POINTS)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, (E) : $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$.

   a) Montrer que : $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(z^2 + pz + q)$, où p et q sont deux nombres complexes à déterminer. **0,50pt**

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,75pt**

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}\,,\vec{v})$ où l'unité sur les axes est de 1 cm.

Les points A, B, et C ont pour affixes respectives $a = 2 + 2i\sqrt{3},\ b = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $c = 8$.

a) Donner une écriture trigonométrique de a, puis placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. **1,00pt**

b) Déterminer le module et un argument de $Z = \frac{a-c}{b-c}$. En déduire la nature du triangle ABC. **1,00pt**

3. Soit h l'homothétie de centre $E(-3,2)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

a) Construire les point A', B' et C' images respectives de A, B et C par h. **0,75pt**

b) Montrer que l'aire du triangle A'B'C' est de $3\sqrt{3}$ cm^2. **0,50pt**

4. Soit r la rotation de centre A qui transforme B en C.

a) Donner l'écriture complexe de r. **0,50pt**

PROBLEME : (10,5 POINTS)

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-ln2\}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2}ln|2e^x - 1|$ et (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité sur les axes est de 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.

(on pourra utiliser le fait que $2e^x - 1 = 2e^x(1 - \frac{1}{2}e^{-x})$). **1,00pt**

2. Démontrer que la dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-ln2\}$ est : $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x - 1}$. **0,50pt**

3. Etudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f. **1,00pt**

4. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **0,50pt**

5. Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln2$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0,50pt**

6. Montrer qu'il existe un unique nombre réel négatif α tel que $f(\alpha) = 0$. **0,50pt**

7. Démontrer que α est solution de l'équation : $e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$ et déterminer la valeur exacte de α. **1,00pt**

8. Construire les droites (D_1) et (D_2) puis la courbe (C). **1,00pt**

Partie B

La fonction f est définie sur [0, + ∞[par $f(x) = \frac{ln\,(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est une fonction strictement décroissante sur [0, + ∞[et dresser son tableau de variation. **0,75pt**

2. La suite (U_n) a pour terme général $U_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

   a) Justifier que : si $n \leq x \leq n+1$ alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. **0,50pt**

   b) Montrer sans chercher à calculer U_n que pour tout entier naturel n,
   $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$ **0,50pt**

   c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,50pt**

3. Soit F la fonction définie sur [0, + ∞[par $F\,(x) = [\,ln\,(x+3)]^2$.

   a) Montrer que F est dérivable sur [0, + ∞[et déterminer sa fonction dérivée. **0,75pt**

   b) Pour tout entier naturel n, calculer $I_n = \int_o^n f(x)dx$. **0,50Pt**

4. On pose pour tout entier naturel , $S_n = U_O + U_1 + U_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots . + U_{n-1}$.

   a) Calculer S_n en fonction de n. **0,50pt**

   b) La suite (S_n) est-elle convergente ? **0,50pt**

Fin de l'épreuve