

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES DUREE : 2 h

L'épreuve comporte deux exercices et un problème, la qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des courbes seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de chaque candidat

EXERCICE 1 : 5 points

- 1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx$ et $\int_0^2 \frac{2x+3}{x+1} \, dx$. 1,5pt
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 2 - i$ et l'application g du plan dans le plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1 - i)z + 1 + 2i$.
 - a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g. 1pt
 - b) Déterminer l'affixe de l'image A' du point A par g, puis placer les points A, B et A' dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . 2pts
 - c) Donner la nature exacte du triangle ABA'. 0,5pt

EXERCICE 2 : 4,5 points

Une urne contient 4 boules vertes, 3 rouges et 2 jaunes toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de tirer 3 boules vertes. 0,75pt
- 2) Calculer la probabilité de tirer 3 boules rouges. 0,75pt
- 3) Calculer la probabilité de tirer 2 boules jaunes. 0,75pt
- 4) Calculer la probabilité de tirer des boules unicolores. 0,75pt
- 5) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule verte. 0,75pt
- 6) Calculer la probabilité de tirer au plus une boule jaune. 0,75pt

PROBLEME : 10,5 points

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(e^x + 1)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est \mathbb{R} . 1pt
- 2) Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. 1,5pt
- 3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote horizontale dont on déterminera une équation. 0,5pt
- 4) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$. 1pt

- 5) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. **1pt**
- 6) En déduire une équation de l'autre asymptote à la courbe (C) . **0,5pt**
- 7) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x > 0$, puis donner la position relative de la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$. **1pt**
- 8) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . **0,5pt**
- 9) Calculer la dérivée f' de la fonction f . **1pt**
- 10) Dresser le tableau des variations de f . **1pt**
- 11) Montrer que la fonction f réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle I que l'on déterminera. **1pt**
- 12) Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de la fonction f est dérivable sur I . **0,5pt**